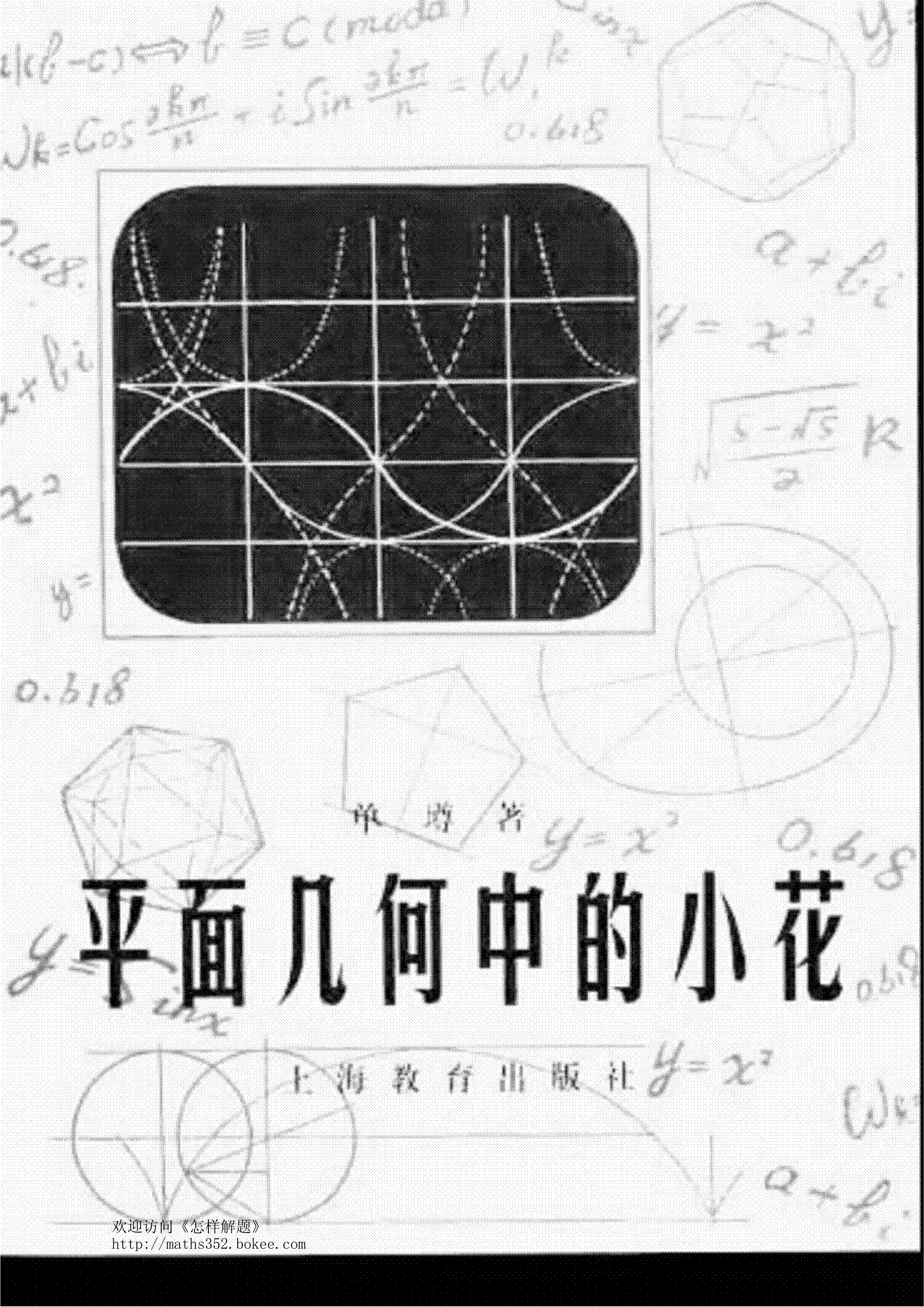


单墫 著

平面几何中的小花

上海教育出版社

平面几何中的小花

单　壿

上海教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

平面几何中的小花/单墫著. —上海:上海教育出版社,2002.5
ISBN 7-5320-8236-9

Ⅰ.平... Ⅱ.单... Ⅲ.平面几何-普及读物
Ⅳ.O123.1-49

中国版本图书馆CIP数据核字(2002)第031084号

平面几何中的小花

单 墫

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行

易文网:www.ewen.cc

(上海永福路123号 邮政编码:200031)

各地新华书店经销 苏州永新印刷包装有限责任公司印刷

开本 787×1092 1/32 印张 6.25 字数 129,000

2002年5月第1版 2002年5月第1次印刷

印数 1~5,150本

ISBN 7-5320-8236-9/G·8291 定价:8.50元

前　言

数学大花园里，几何是最美丽的部分．我们从平面几何中撷取几朵小花，供大家欣赏，其中有我们近期遇到的问题，也有著名的经典结果．

各节之间没有特别紧密的联系．内容较为接近的，归入一章．本来没有章名，后来写了两首歪诗，权当章名．一首是：

“数学花园大，
几何算一家．
春日兴致好，
请来看小花．”

作　者

目　录

（一）数学花园大

1. 帕普斯定理

数学，是一门博大精深的学问．学习它的最好方法是自己去发现它．

很多几何定理，可能就是在随便画画当中产生的．

如果你有直尺，随意画两条直线 l_1，l_2（图 1）．然后在 l_1，l_2 上轮流地各取 3 个点．即 A_1，A_3，A_5 在 l_1 上；A_2，A_4，A_6 在 l_2 上．这六个点构成一个自身相交的六边形（闭折线），即如图连接 A_1A_2、A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5A_6，A_6A_1． A_1A_2 与 A_4A_5 相交于 D，我们简记作

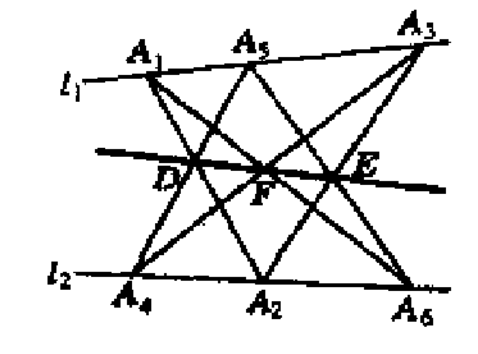


图 1

$$A_1A_2\cap A_4A_5=D.$$

同样，$A_2A_3\cap A_5A_6=E$，$A_3A_4\cap A_6A_1=F$．

D，E，F 三点的位置有什么特点？

它们似乎在一条直线上．用直尺比划一下，果真如此！

这是偶然的吗？

如果你再画一个图，情况仍然如此．于是你就发现了一个定理：

定理 在直线 l_1 上任取三点 A_1、A_3、A_5，在直线 l_2 上任取三点 A_2，A_4，A_6，$A_1A_2\cap A_4A_5=D$，$A_2A_3\cap A_5A_6=E$，$A_3A_4\cap A_6A_1=F$，那么 D，E，F 三点共线．

不过这一定理早已有人发现过.它称为帕普斯(Pappus)定理.帕普斯是公元3世纪时希腊的数学家.

虽然你发现的定理早已有人发现,不必为此沮丧.我国大数学家华罗庚在自学的过程中就常常重复别人的发现(如复变函数中的柯西定理).他觉得自己能独立发现这些定理,正说明自己与历史上著名的数学家有同样的水平,因而对前途充满了信心.

从本节至第4节,我们将介绍三个几何定理(帕普斯定理是第一个).这些定理是著名的,因此学习几何的人都应当知道.这些定理是优美的,我们应当多加欣赏.这些定理有不少应用,但在中学阶段(包括数学竞赛)却很少用到.不过,如果能够用上,问题多半迎刃而解(这就好像核武器,几乎派不上用场,但二战末期偶尔一用,日本鬼子就举手投降了).这些定理的证明往往都不容易,但在有关书中不难查到.所以这里我们也不急于给出证明.不过,如果你有兴趣看到本书最后几节,也会找出一种证明.

2. 帕斯卡定理

"人只不过是一根苇草,是自然界最脆弱的东西;但他是一根能思想的苇草.我们全部的尊严就在于思想.由于思想,人囊括了宇宙,思想形成人的伟大."

——帕斯卡《思想录》

任作一个圆(图2).在圆上任取六点A_1,A_2,A_3,A_4,A_5,A_6.设$A_1A_2\cap A_4A_5=D$,$A_2A_3\cap A_5A_6=E$,$A_3A_4\cap A_6A_1=F$,

则有

D,E,F 三点共线.

类似的结论,对于椭圆、双曲线、抛物线也同样成立. 而在双曲线蜕化成两条相交直线(或抛物线蜕化成两条平行直线)时,上述结论就变成帕普斯定理.

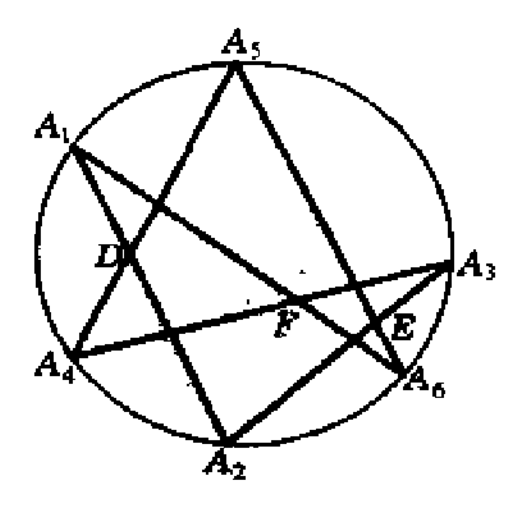


图 2

于是,我们有如下定理:

定理 如果一个六边形内接于一条二次曲线(椭圆、双曲线、抛物线),那么它的三对对边的交点在同一条直线上.

这一定理称为帕斯卡定理.

布莱斯·帕斯卡(1623.6.19—1662.8.19),是一位天才. 在16岁左右(约1639年)就发现了上述定理.

帕斯卡是概率论的奠基人之一. 他18岁时,发明并制造了历史上第一架计算机. 25岁左右,发现了物理学中关于液压传递的帕斯卡原理. 他还是一位杰出的文学家,他的《思想录》与《致外省人的信》是法国文学的宝藏. 但从31岁起,他的主要精力用于神学,沉缅于宗教狂热之中.

帕斯卡定理中的六边形,可以是图2中自身相交的六边形,也可以是图3中的常见的简单多边形.

帕斯卡定理有种种特殊的情况. 例如 A_1 与 A_2 重合,A_5 与 A_6 重合,就得到(图4):

圆内接四边形 $A_1A_3A_4A_5$ 对边 A_1A_5,A_3A_4 的交点 F,A_1 处切线与 A_4A_5 的交点 D,A_5 处切线与 A_1A_3 的交点 E,三点共线.

如果图3中 A_1 与 A_2 重合,A_3 与 A_4 重合,A_5 与 A_6 重

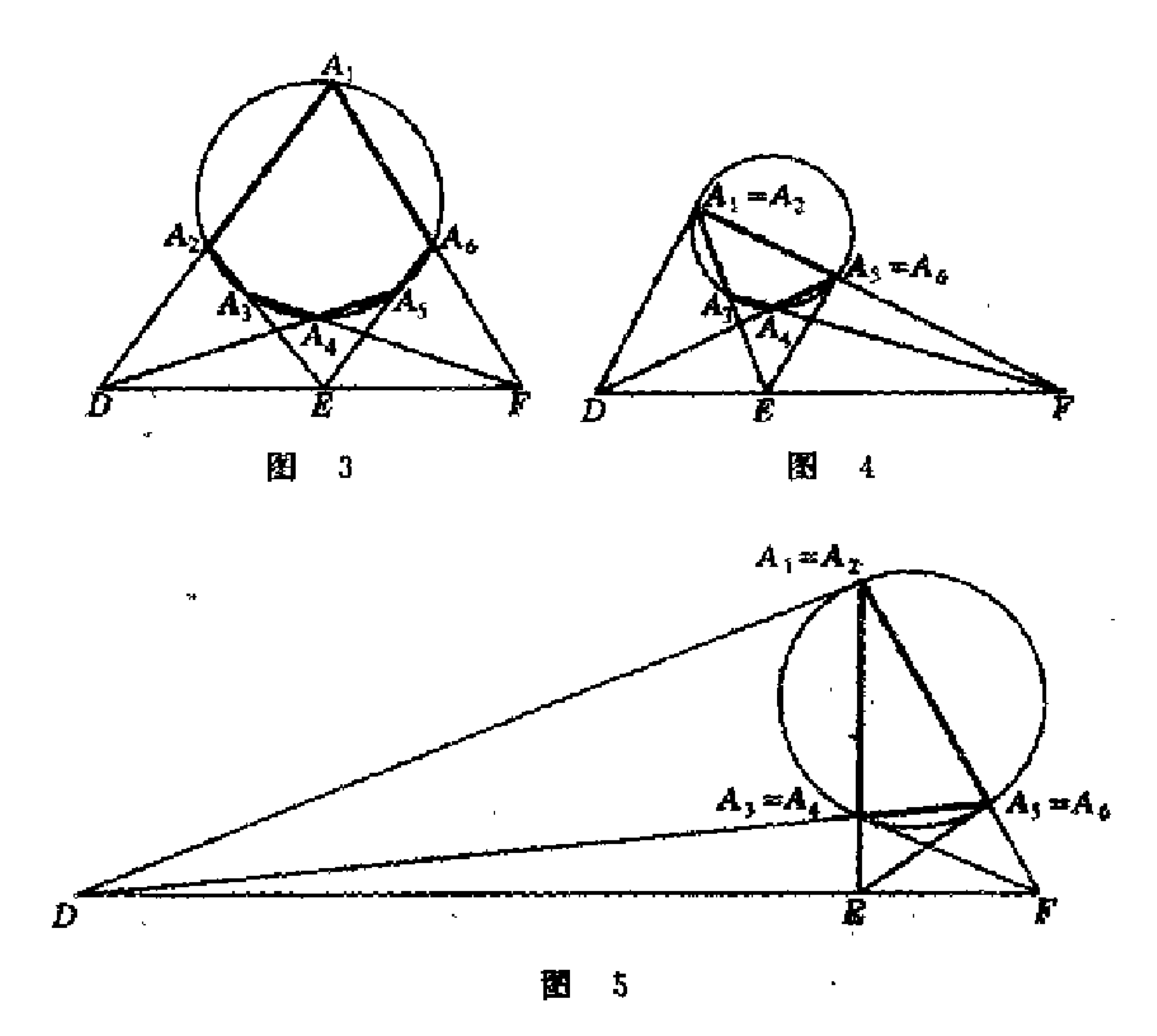


图 3　　图 4

图 5

合，就得到(图 5)：

圆内接三角形，每一顶点处的切线与对边的交点，这三点共线。

70年代，国内曾有人在杂志上发表了一些“新”定理，以为是“前贤所未曾发现的”。其实都是帕斯卡定理的特殊情况。

3. 无穷远点

“数学的统一性及简单性都是极为重要的，因为数学的目的，就是用简单而基本的词汇去尽可能多

地解释世界.归根结底,数学仍然是人类的活动而不是计算机的程序.如果我们积累起来的经验要一代一代传下去的话,我们就必须不断地努力地把它们加以简化和统一."

——M·阿蒂亚《数学的统一性》

清晨,一束阳光照进了教室.

光线是平行的,但它们来自于同一个光源——太阳,也就是它们相交于同一点(太阳).

当然,太阳并不是几何学中的没有形状大小,只有位置的点.光线也不是严格意义下的平行直线.但与日、地之间的距离相比,太阳的半径显得很小,可以将太阳当作一个点.并且,可以说平行直线相交于*无穷远点*.

通常几何中,平面上的两条直线或者相交,或者平行.引入无穷远点,就可以将这两种说法统一起来:

平面上任意两条直线有且仅有一个交点.

如果交点是无穷远点,那么两条直线就是平行直线.

通常还约定:

一组平行线(一束光线)相交于同一个无穷远点.另一组平行线,相交于另一个无穷远点.过两个无穷远点的直线称为*无穷远线*.所有的无穷远点都在这条无穷远线上.

引进无穷远点带来许多便利.例如在帕斯卡定理中,如果边 $A_1A_2 /\!/ A_4A_5$,那么图 3 中的 D 就是无穷远点.这时帕斯卡定理仍然成立,其中直线 EF 过无穷远点 D,也就是 $EF /\!/ A_1A_2$.如果不用无穷远点,就需要将这些"例外"情况一一列出,弄得支离破碎,十分乏味.而有了无穷远点,全可以统一成一种叙述,即上节的帕斯卡定理.

4. 笛沙格定理

如果$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$的对应顶点的连线A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3交于同一点O，那么对应边的交点必定共线，即：设A_2A_3与B_2B_3交于C_1，A_3A_1与B_3B_1交于C_2，A_1A_2与B_1B_2交于C_3，则C_1，C_2，C_3三点共线(图 6).

这个定理称为笛沙格(Desargues)定理.

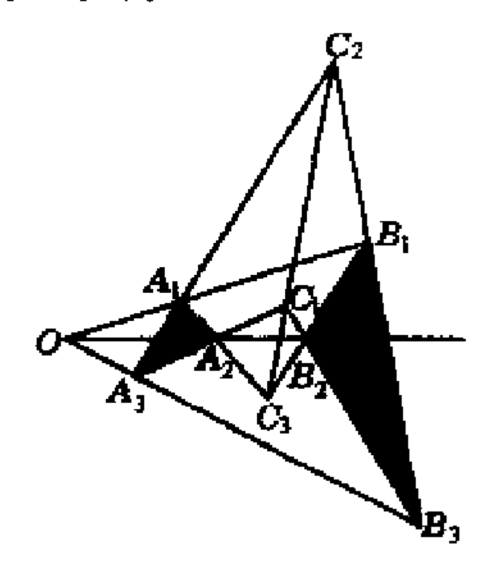


图 6

定理中的O点称为透视中心，处于定理所说位置的$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$称为透视的.

笛沙格定理在证明三点共线时很有用处(如第 76 节). 它的证明很多，本书将在第 94 节给出一个证明.

笛沙格定理的逆也是正确的. 即：

如果$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle B_1B_2B_3$的对应边的交点C_1，C_2，C_3共线，那么这两个三角形是透视的.

笛沙格定理的逆可以用同一法来证. 但更简单的办法是注意$\triangle A_1B_1C_3$与$\triangle A_3B_3C_1$，它们是透视的，透视中心是C_2. 因而根据笛沙格定理，对应边的交点A_2，B_2及A_1B_1与A_3B_3的交点O，三点共线. 换句话说，A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3三线共点，$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$是透视的.

（二）几何算一家

5. 对　　称

几何学是优美的．对称，就是一种美．

一圆的竖直位置的直径向右移a厘米，水平直径向上移b厘米．这两条直线将圆分成四份．考虑最大一份与最小一份的面积之和及其他两部分面积的和．求这两个和的差．

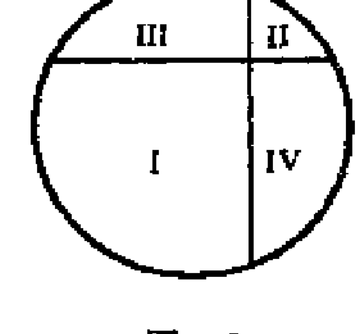


图　7

显然左下的一份最大，右上的一份最小．

为了计算差，最好利用对称．

从 I 中去掉一块等于 III，从 IV 中去掉一块等于 II．这样只需计算 V 比 VI 大多少．

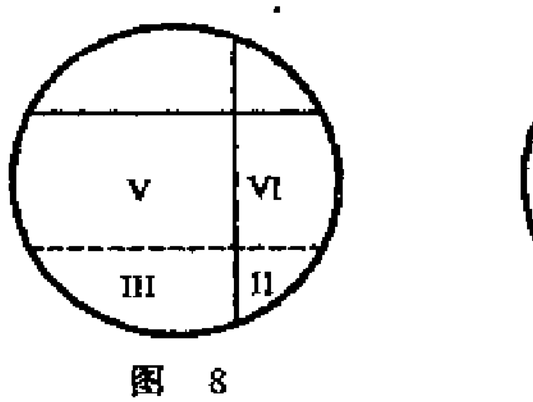


图　8

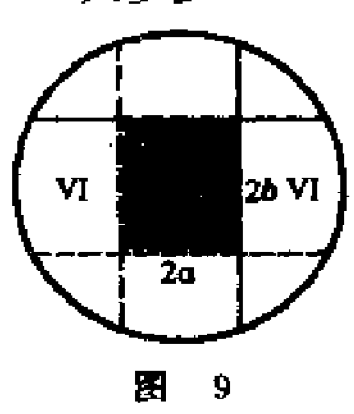


图　9

再从 V 中去掉一块等于 VI．剩下一个长方形，长为 $2a$，宽为 $2b$，面积为

$$2a\times2b=4ab.$$

即所求的差为 $4ab$．

6. 多么奇妙的一颗星

你打过弹子球(台球)吗?

即使自己没有打过,多半也看过别人打台球.电视里也常有台球比赛的实况转播.

台球的原理是反射定律,即当球击到球台的边缘时,球按照

"反射角等于入射角"

的规律而反弹,如图10所示.

图中与桌面垂直的虚线称为法线.入射线与法线的夹角α称为入射角;反射线与法线的夹角β称为反射角.

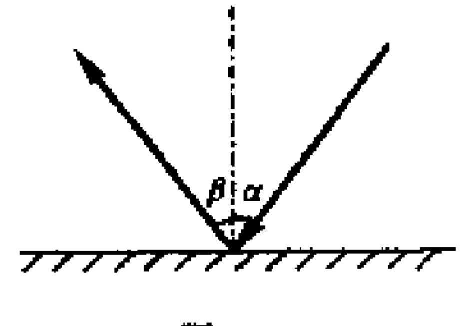


图 10

道理虽然简单,运用起来却不容易.一个高手可以打出许多花样,得出意料不到的效果.球的轨迹可以形成美妙的曲线,例如正三角形、五角星等等.台湾一位小说家夏烈在他的短篇名著《多么奇妙的一颗星》中,通过一位台球高手的两次击球写出了人生的况味(他还写过一个脍炙人口的短篇《白门》.夏烈先生的母亲就是写《城南旧事》的林海音女士).

通常的台球桌是长方形的.现在(请设想一下)有一个正三角形的台球桌.一位台球高手夸耀说:

"我曾在这样的球桌上,将球从桌边击出,沿三个不同方向通过同一点,然后回到出发点."

这位选手说的事情能否发生?他有没有说牛?

如果这件事不可能发生,多半要用反证法来证明(假定这件事发生,如何如何,最后导出矛盾).如果这件事可能发生,

多半用构造法，即举出一个实例.

问题是事先不知道答案，需要判断究竟是能还是不能.

判断只有依靠经验与实践.

如果你恰好知道有一个这样的图形，那么问题便迎刃而解. 否则只能反复尝试，看看能否构造出一个符合要求的图形. 如果怎么也造不出，那么或许要用反证法证明这样的图形不存在. 如果无法用反证法否定这种图形的存在，那么或许这种图形是存在的，再尝试构造符合要求的图形. 这样试来试去，经过多次失败，最终会取得成功.

很可能一位小学生或初中生，会比年龄大的人先获得成功，如果他或她有很好的数学感觉.

答案是这种图形是**存在**的. 请再努力构造一下，然后再看下面的图 11.

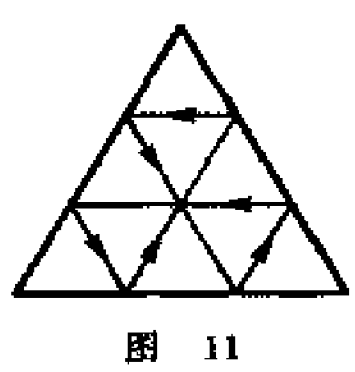


图 11

7. 面 积 问 题（一）

如图 12，正方形边长为 10. 一条长为 9 的线段 AB，端点在这正方形的两条邻边上. 在 A 下面 3 处作水平线，在 B 左面 2 处作垂直线，得到 C，D. 求四边形 $ABCD$ 的面积.

这是一道日本小学算数奥林匹克的问题. 小学生可以做，但高中生却也未必做得好.

不要把问题想得过于复杂，不要引用过多的知识（例如勾

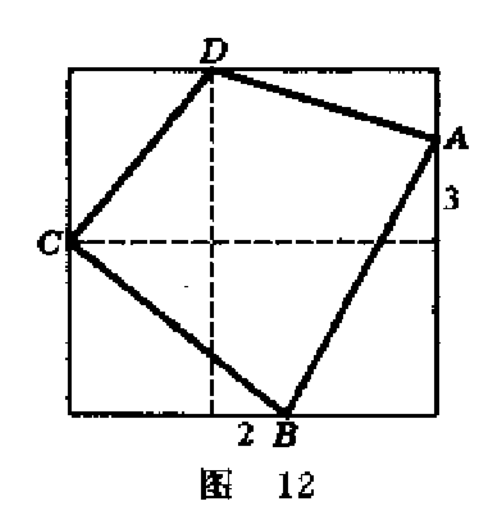


图 12

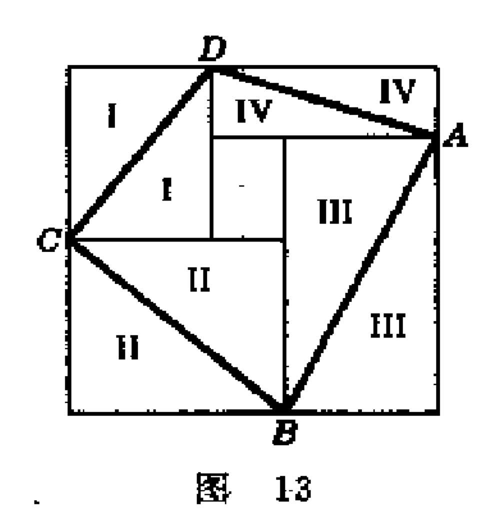


图 13

股定理).

小学生不会犯引用过多知识的错误，他们所能利用的只是面积割补，而这也就足够了.

如图 13，由于矩形被对角线分成两个面积相等的三角形，所以两个 I 相等，两个 II 相等，两个 III、两个 IV 也都分别相等. 四边形 $ABCD$ 比正方形的其余部分多出一个矩形的面积. 这个矩形，其长、宽分别为 3，2，所以面积是

$$3\times 2=6.$$

从面四边形 $ABCD$ 的面积是

$$(100+6)\div 2=53.$$

另一种解法(初中学生常会采用)是设未知数.

如图 14，设 $AE=x$，$EB=y$，则其他线段 BF 等可用 x 或 y 的代数式表出，从而正方形去掉面边形 $ABCD$ 后，所得四个三角形的面积和是

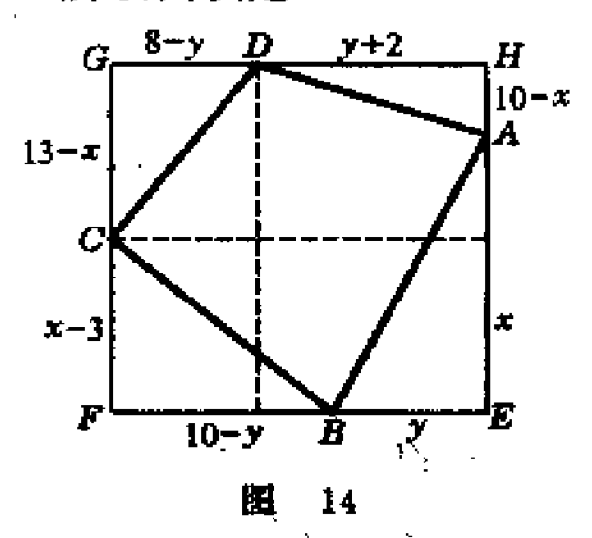


图 14

$$\frac{1}{2}[xy+(x-3)(10-y)$$
$$+(13-x)(8-y)+(y+2)(10-x)]. \qquad ①$$

经过化简，式中含 x 或 y 的项全部抵消，结果是一个常数 47

$\left(=\frac{1}{2}(13\times 8+2\times 10-3\times 10)\right)$.

从而四边形 $ABCD$ 的而积是

$$100-47=53.$$

有趣的是①实际上是与 x,y 无关的常数，所以并不需要列方程，消去未知数(未知数已经自动消去).

如果是填空题，还有一种猜答案的方法，即假定 B 是正方形的顶点，如图 15 所示.

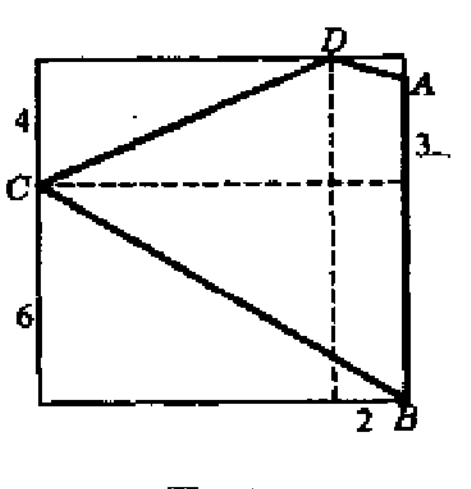


图 15

这时易算出去掉四边形 $ABCD$ 后，所得三个三角形的面积和是

$$\frac{1}{2}(10\times 6+4\times 8+2\times 1)=47,$$

从而四边形 $ABCD$ 的而积是

$$100-47=53.$$

这种解法的优点是借助于特殊情况，很快求出一个解. 在答案是唯一时，有了一个解也就有了全部解. 缺点是这种解法并非证明不论 AB 位置如何，答案都是一个. 如果有两个或更多个解，那么结论就不完整了.

应该说，第一种解法是简单. 当然，简单并不意味容易想到.

本题的结果实际上与 AB 的长，以及 AB 的倾斜程度无关.

8. 面积问题(二)

如图 16，两个边长相等的正方形各被分成 25 个大小相同的小方格. 现将这两个正方形的一部分重叠起来，若左上角的阴影部分(点状)面积为 5.12cm^2. 右下角的阴影部分(线状)面积为 7.4cm^2，求大正方形的面积.

本题如没有正确的方法，不仅十分棘手，而且多半得不出答案.

设点状面积为 A，线状面积为 B，在这两部分之间的面积为 C，则 A,C 共有 14（不包括被 B 围住的、右下的那一个）方格. 而 B,C 共有 17（=18−1）个方格（同样不包括右下的那一个方格）.

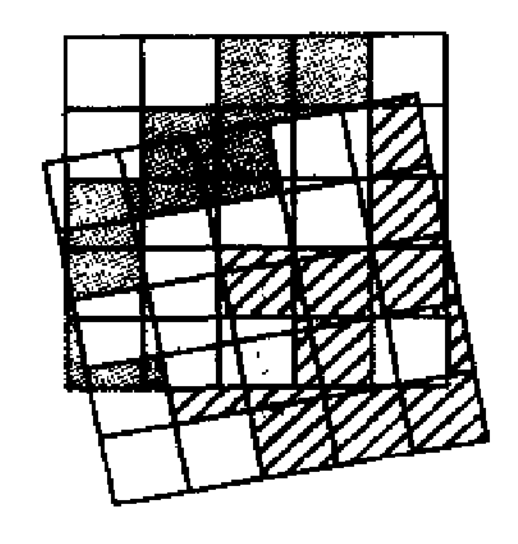


图 16

因此，一个方格的面积是

$$(7.4-5.12)\div(17-14)=0.76(\text{cm}^2).$$

大正方形的面积是

$$0.76\times5^2=19(\text{cm}^2).$$

本题是第六届上海“从小爱数学”邀请赛的试题，由上海钟建国老师提供.

“从小爱数学”是小学高年级学生的竞赛，但这道题却未必每个高中学生都能做好，可见从小培养对数学的兴趣、感觉，是一件非常重要的事.

9. 中心对称

如图17，设 D 为 $\triangle ABC$ 的边 BC 的中点，E，F 分别在 AC，AB 上. 证明：

$$S_{\triangle DEF}\leqslant\frac{1}{2}S_{\triangle ABC}. \qquad ①$$

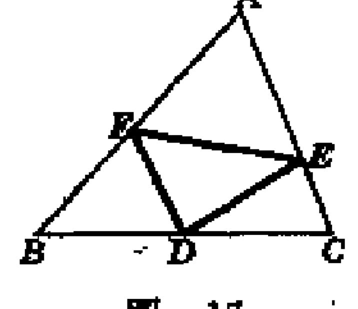


图 17

本题不算很难，证法也很多. 应当寻找尽可能简单的证法.

我们利用中心对称（条件“D 是 BC

的中点"启示我们这样做).

以D为对称中心,设A,E,F的(关于中心D的)对称点分别为A',E',F'(图 18),即分别延长AD、ED、FD到A',E',F',使$DA'=AD,DE'=ED,DF'=FD$.

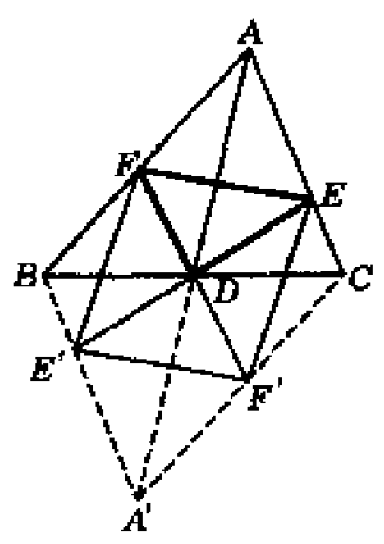
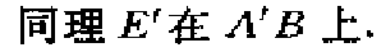


图 18

因为B的(关于D的)对称点是C,所以AB关于D的对称图形是$A'C$. F在AB上,所以F'在$A'C$上(也可以用$F'A'/\!/FA$,$F'C/\!/FB$证明F',A',C共线).


同理E'在$A'B$上.

显然四边形$A'CAB$,$E'F'EF$都是平行四边形,所以

$$\begin{aligned}2S_{\triangle DEF}&=S_{\triangle DEF}+S_{\triangle DE'F'}\\&=\frac{1}{2}S_{\square E'F'EF}\leqslant\frac{1}{2}S_{\square A'CAB}\\&=S_{\triangle ABC},\end{aligned}$$

即①成立.

当E,F分别与A,B重合(或分别与C,A重合)时,①中等号成立.

10. 部分与整体相似

一个三角形不会与它的一部分全等,但却可能与它的一部分相似.

设K为$\triangle ABC$内一点(图 19),如果$\triangle KBC$与原三角形相似,应当满足哪些条件?

首先，$\angle BKC > \angle A$. 不妨设 $\angle BKC = \angle BCA = \beta + \varphi$. 由于 $\angle ABC > \alpha$，所以必须有 $\angle ABC = \beta$. 从而 $\angle A = \alpha$，即 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 最小的角.

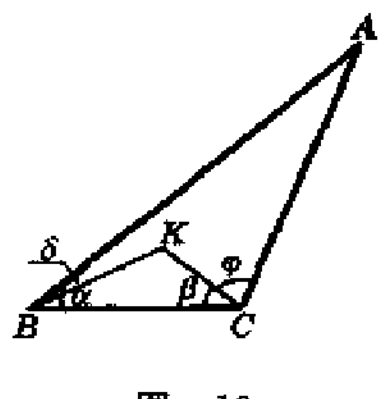


图 19

因此，设 $\angle A$ 是 $\triangle ABC$ 的最小的角，$\angle C$ 是最大的角，作 $\angle CBK = \alpha$，$\angle KCB = \angle ABC$，BK，CK 相交于 K，则

$$\triangle BCK \backsim \triangle ABC. \qquad ①$$

即每一个三角形内都可以找到一点 K，使得 K 与某两个顶点所成的三角形与原三角形相似.

如果图 19 中，$\delta = \alpha$，$\varphi = \beta$，那么当①成立时，$\triangle ABC$ 的三个角 A，B，C 分别为 α，2α，4α. 因为

$$\alpha + 2\alpha + 4\alpha = 180°,$$

所以 $\triangle ABC$ 的三个角分别为 $\frac{180°}{7}$，$\frac{2\times180°}{7}$，$\frac{4\times180°}{7}$. 即如果 $\triangle ABC$ 的内心与某两个顶点所成的三角形与 $\triangle ABC$ 相似，那么 $\triangle ABC$ 的三个角必定是 $\frac{180°}{7}$，$\frac{2\times180°}{7}$，$\frac{4\times180°}{7}$.

11. 对角线的中点与面积

凸四边形 $ABCD$ 的对角线 AC，BD 相交于 K. 如果面积和

$$S_{\triangle AKB} + S_{\triangle CKD} = S_{\triangle BKC} + S_{\triangle DKA}, \qquad ①$$

那么 K 是 AC 或 BD 的中点.

问题不难. 但入手的第一步应特别留心，不宜过于草率. 否则会做得很繁，事倍功半.

如果 K 不是 AC 的中点，设 M 是 AC 的中点(图 20). 易知

$$S_{\triangle CKD}-S_{\triangle DKA}$$
$$=(S_{\triangle CMD}+S_{\triangle MDK})$$
$$-(S_{\triangle DMA}-S_{\triangle MDK})$$
$$=2S_{\triangle MDK}. \qquad ②$$

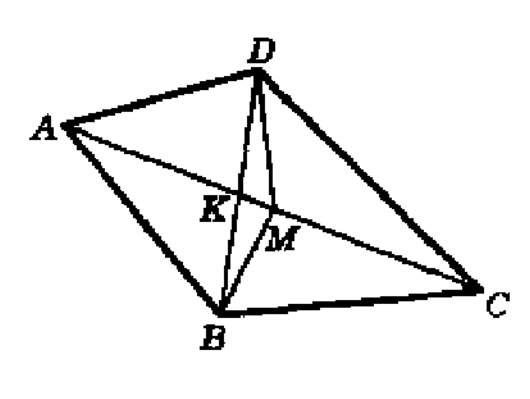


图　20

同理，

$$S_{\triangle BKC}-S_{\triangle AKB}=2S_{\triangle MBK}. \qquad ③$$

由①，②，③，

$$S_{\triangle MDK}=S_{\triangle MBK},$$

从而 K 是 BD 的中点.

反过来，当 K 为 AC 或 BD 的中点时，①显然成立. 可以证明满足①的点 K 的轨迹就是过 AC、BD 中点的直线，称为牛顿线（当然，需要约定面积是所谓的“有向面积”，即当 A，K，B 三点成逆时针方向时，约定 $S_{\triangle AKB}$为正；当 A，K，B 三点成顺时针方向时，$S_{\triangle AKB}$为负）.

12. 处处留心皆学问

学习，应当不断地提出问题，“于无疑处有疑”，切勿轻易放过那些可以动动脑筋的机会.

这里举两个简单有趣的几何作图中的问题：

“过直线 l 外一点 A 作 l 的平行线.”

这样的作图，初中同学人人学过. 我们应该再进一步，提出新的要求——“至少要画几条线，就可以完成上述作图？”

这里的线指直线或圆（弧），并且作图工具只有圆规与（没有刻度的）直尺，不允许用三角板推.

答案是三条线.（请读者先想一想，试一试，然后再看下面的解答.）

作法如下：

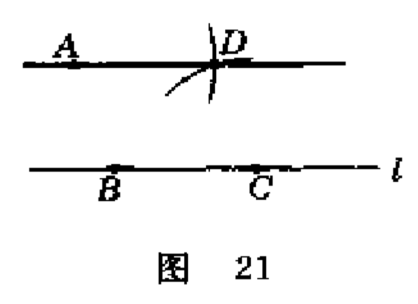


图 21

如图 21，在 l 上任取两点 B，C. 分别以 A，C 为圆心，BC，BA 为半径作圆，两圆(与 A 在 l 同侧)的交点为 D，过 A，D 作直线.

易知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，所以 AD 就是所求的平行线.

我们一共作了三条线：两个圆弧，一条直线. 能不能减少一条线呢？不能！因为最后总要作一条直线，它由 A 及另一点 D 确定；而定出 D 点必须两条线，所以至少要作三条线.

类似地，还可以考虑：

“过点 A 作直线 l 的垂线，至少要作几条线(只允许用圆规、直尺，不允许用三角板)？”

解答分两种情况：

(i) A 在 l 外. 通常的作法需要四条线. 但是，只要我们多想一想，可以知道用三条线就足够了. 如图 22，在 l 上任取两点 B，C，分别以 B，C 为圆心，BA，CA 为半径画弧，相交于(异于 A 的)点 D，则 AD 就是 l 的垂线.

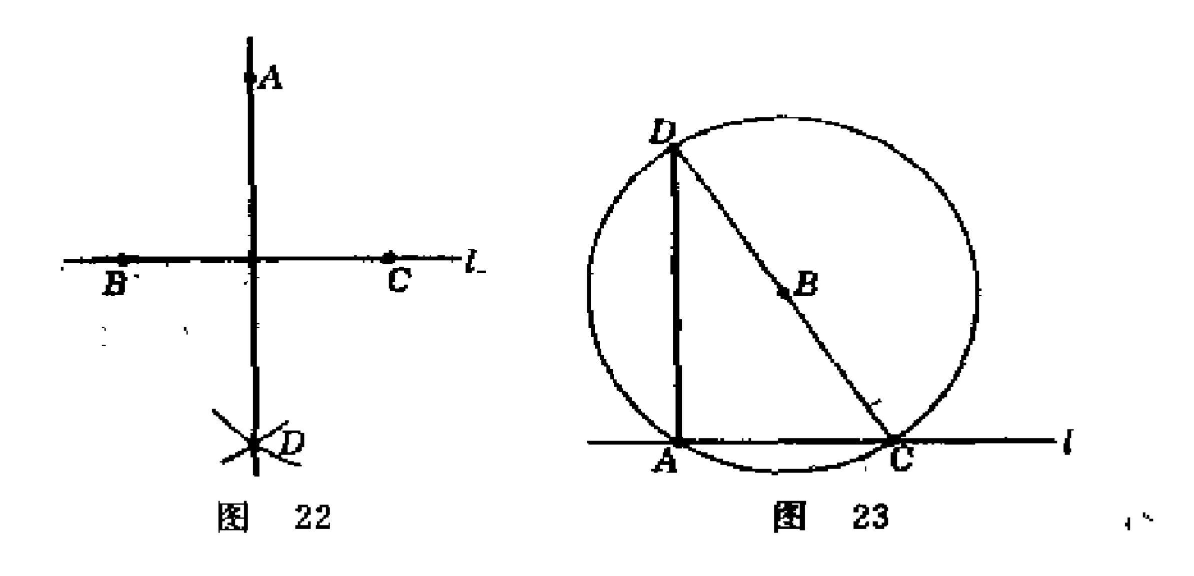


图 22　　图 23

(ii) A 在 l 上. 上面的作法不再适用,必须另辟蹊径.

在 l 外任取一点 B,以 B 为圆心,BA 为半径作圆,交 l 于(异于 A 的)点 C(如果这圆与 l 相切于 A,那么 BA 就是 l 的垂线). 过 C 作⊙B 的直径 CD,则直线 DA 即为所求(图 23).

与前一个问题道理相同,三条线是最少的.

上面的两道作图题虽不困难,但也不一定很快就能想到正确的答案. 在学习的过程中应当多思,多问,处处留心皆学问.

13. 圆 规 作 图

单用圆规,可以作出所有尺规作图(用直尺、圆规)能作的点.

本节介绍两个单用圆规的作图.

1. *已知正方形 $ABCD$ 的顶点 A,C,求作 B,D.*

设 $AC=1$. 如图 24,作⊙$(A,1)$,⊙$(C,1)$相交于 E,F;作⊙(E,EF)分别交⊙$(A,1)$,⊙$(C,1)$于 G,H;作⊙(H,HA)交⊙$(A,1)$于 I;最后作⊙(G,GI),⊙(H,GI)相交于 C,D. 则 C,D 即为所求.

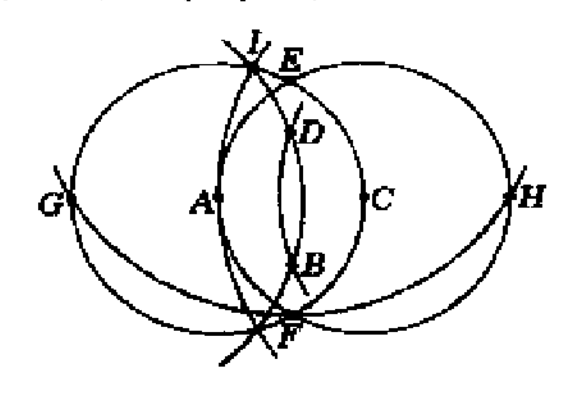


图 24

证明需用余弦定理. 易知 $EF=\sqrt{3}$,G,H 在连心线 AC 上. 对△GAI 与△HAI 用余弦定理,

$$GI^2=1^2+1^2+2\cos\angle IAH$$
$$=2+\frac{2^2+1^2-2^2}{2\times 1}=\frac{5}{2}.$$

而对于正方形 $ABCD$ 的顶点 B，有

$$GB^2=\left(1+\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{2}.$$

所以图中得到的 B,D 的确是正方形 $ABCD$ 的顶点.

2. 已知⊙O 及其圆心 O，将圆四等分.

设⊙O 的半径为 1.

如图 25，在⊙O 上任取一点 A，作⊙$(A,1)$交⊙O 于 B,C；作⊙$(B,1)$交⊙O 于 D，交⊙A 于 E；作⊙(D,DA)，⊙(E,EO)相交于 G；最后，作⊙(B,BG)交⊙O 于 I,H.

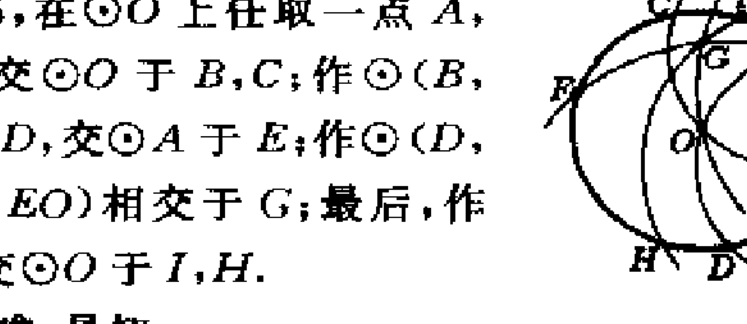


图 25

证明不难：易知

$$DA=EO=\sqrt{3},$$

$$BG=\sqrt{(\sqrt{3})^2-1^2}=\sqrt{2}.$$

注意我们只作了5个圆.

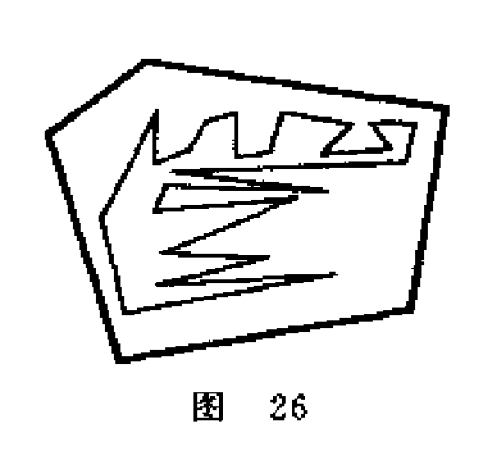
14. 闭折线的长

大家都知道，两点之间的路程以连接这两点的线段为最短. 这是课本中的一个重要定理.

从生活中，还知道兜一个大圆子比兜一个小圈子远. 确切一点，可以叙述成下面的定理：

定理 闭折线的长≥包含在其中的凸的闭折线的长. 等号仅在两者重合时成立.

这个定理中，里面的闭折线必须是凸的（即成凸多边形），否则结论不成立. 如图 26，里面的折线弯了许多次，总长比


图 26

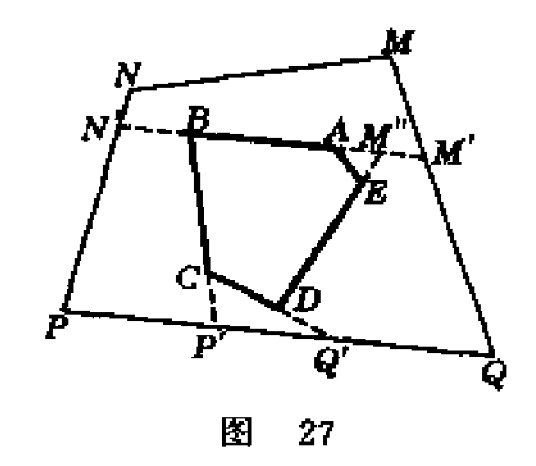


图 27

外面的折线长.

这个定理怎么证明?

大家都知道如何切饼. 切饼就是我们的证法. 如图 27, 凸闭折线 $ABCDE$ 在闭折线 $MNPQ$ 中. 先沿 AB 切一刀, 切去图中的四边形 $MNN'M'$. 由于

$$M'M+MN+NN'\geqslant M'N',$$

所以只要证明

闭折线 $M'N'PQ$ 的长 $\geqslant$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

再沿 BC 切一刀, 切去 $BP'PN'$, 同样有

$$BN'+N'P+PP'\geqslant BP'.$$

只要证明

闭折线 $M'BP'Q$ 的长 $\geqslant$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

这样继续下去, 一刀一刀地切, 直至最后只剩下闭折线 $ABCDE$. 显然

闭折线 $ABCDE$ 的长 $=$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

因此

闭折线 $MNPQ$ 的长 $\geqslant$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

而且只要所述两条闭折线不重合. 上面切的过程中至少有一个不等式是严格的不等式. 从而

闭折线 $MNPQ$ 的长 $>$ 闭折线 $ABCDE$ 的长.

换句话说，仅在两条闭折线重合时，两者的长相等.

15. 正方形中的四个点

正方形 $ABCD$，边长为 1. E，F，G，H 是正方形中的四个点，每两点之间的距离不小于 1. 求证 E，F，G，H 是正方形 $ABCD$ 的四个顶点.

本题有多种解法. 有些人试图用面积来证，做得很复杂还没有成功. 这条道路恐怕是没有多少希望的. 因为边长$\geqslant 1$ 的四边形，面积未必大于 1(甚至可能很接近于零，在四边形"很扁"，接近于一条线段时，便出现这种情况). 即使增加种种限制(将两点间的距离用余弦定理表示)，要从面积突破也是徒然. 如果这条道路没有希望，那就不必坚持非走不可，不如及早抽身为好.

判别一条道路能否走通，需要有识别能力. 这种能力往往来自于经验与感觉. 如果越走越繁，越做越难，没有任何成功的曙光，多半已经走错了路，离了正题.

为了不走错路，一开始应当多考虑几个方案，估量一下哪一种方案最有实现的可能. 切忌"慌不择路"，一头扎进死胡同，而又不能"迷途知返".

在本题中，既然总要用到线段的长(即两点的距离)，不如直接就用线段的长来解.

第一种解法是利用三角形的余弦定理.

四边形 $EFGH$ 的内角和为 360°，其中必有一个角$\geqslant 90°$. 设$\angle EFG\geqslant 90°$，则

$$EG\geqslant\sqrt{EF^2+FG^2}\geqslant\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}.$$

边长为 1 的正方形中，两点间最长的距离为 $\sqrt{2}$. 当且仅

当这两点是相对的两个顶点时，距离为$\sqrt{2}$.

因此，E,G 是正方形的顶点 A,C.

到 E,G(即 A,C)距离均$\geqslant 1$ 的点，不在以 A 为圆心，1 为半径的圆的内部，也不在以 C 为圆心，1 为半径的圆的内部. 在正方形 $ABCD$ 中，这样的点只有两个，即这两个圆的交点 B,D. 因此 F,H 必与这两点重合.

不少学生认为这题做到这里已经完成. 其实在上面的证明中暗中假定了四边形 $EFGH$ 是凸四边形.

如果 E,F,G,H 不构成凸四边形，那么有两种可能：

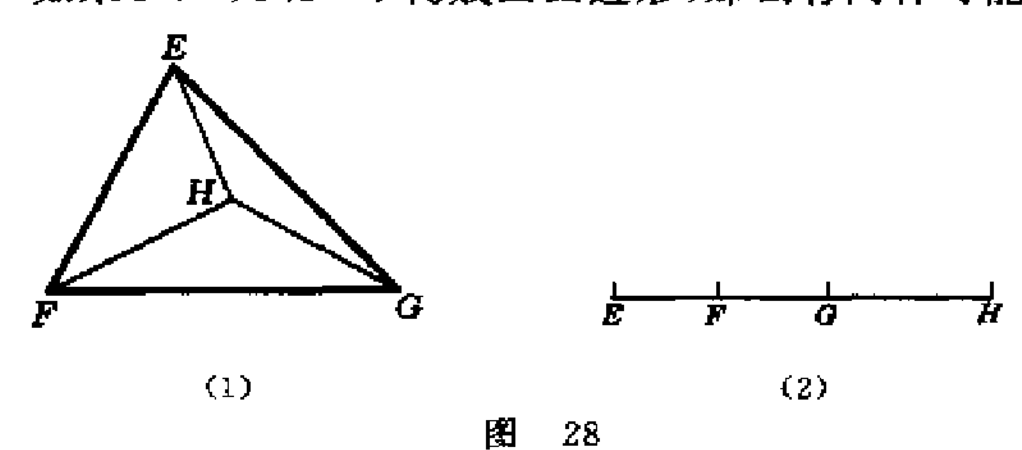


图 28

(1) 点H 在$\triangle EFG$ 内[图 28(1)]. 这时$\angle EHF$，$\angle FHG$，$\angle GHE$ 的和是 360°，其中必有一个$\geqslant 120°$. 设$\angle EHF\geqslant 120°$，则 $EF\geqslant\sqrt{1^2+1^2+2\times1\times1\times\frac{1}{2}}=\sqrt{3}>\sqrt{2}$.

(2) 四点在同一条线段上[图 28(2)]. 这时

$$EH=EF+FG+GH\geqslant 1+1+1=3.$$

由于正方形 $ABCD$ 中，两点间的距离$\leqslant\sqrt{2}$，所以上述两种情况均不可能发生.

一般说来，包含 n 个点的最小的凸(多边)形称为这 n 个点的凸包. 四个点的凸包，有上述三种，即凸四边形、三角形、线段(还有一种极特殊的情况：四点重合成一个点).

其实 E,F,G,H 成凸四边形的情况，可以利用上一节提到的一个常用的定理：

闭折线的长大于或等于被它包含的凸的闭折线的长. 等号仅在两者重合时成立.

因为凸折线 $EFGH$ 的长 $\geqslant 1+1+1+1=4=$ 正方形 $ABCD$ 的周长，所以由这个定理立即得出 E,F,G,H 是正方形的四个顶点.

泰州中学的学生还提出一个新的证明：

考虑正方形 $ABCD$ 的外接圆. 圆心 O 到各顶点距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$. E,F,G,H 都在正方形内，当然也在⊙O 内. 不妨设 OE,OF,OG,OH 为依逆时针顺序的四条线段. $\angle EOF$，$\angle FOG$，$\angle GOH$，$\angle HOE$ 中至多有一个不小于 180°. 不妨设前三个角都小于 180°.

由于 $EF\geqslant 1=\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}\geqslant\sqrt{OE^2+OF^2}$，所以 $\angle EOF\geqslant 90°$. 同样 $\angle FOG$，$\angle GOH$ 都不小于 90°. 因而 $\angle HOE<180°$. 同样 $\angle HOE\geqslant 90°$. 由于 $\angle EOF$，$\angle FOG$，$\angle GOH$，$\angle HOE$ 的和是 360°，所以这四个角都等于 90°，而且 $OE=OF=OG=OH=\frac{\sqrt{2}}{2}$. 因为正方形中只有四个顶点在外接圆上，所以 E,F,G,H 就是四个顶点.

解题时，学生常有新的、不同的解法. 教学相长，互相学习决不是一句空话.

上述解法中，应注意 $\angle EOF$，$\angle FOG$，$\angle GOH$，$\angle HOE$ 中可能有大于或等于 180° 的. 这就是 E,F,G,H 不成凸四边形的情况. 论证需要细致，不可出现漏洞.

16. 跳 出 框 框

在解题讨论班中，下面的问题，曾经引起很热烈的讨论：

如图 29，已知凸六边形 $AA'BB'CC'$ 中，

$$\angle A=\angle A',\angle B=\angle B',\angle C=\angle C', \quad ①$$

并且

$$AA'=AC',BA'=BB',CB'=CC'. \quad ②$$

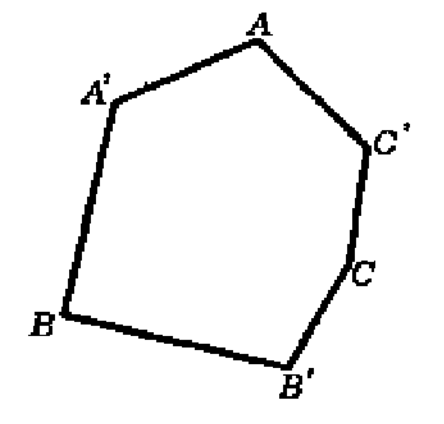


图 29

求证：$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}S_{AA'BB'CC'}$.

很多学员发现要证明的结论就是

$$S_{\triangle A'AB}+S_{\triangle B'BC}+S_{\triangle C'CA}=S_{\triangle ABC}. \quad ③$$

因此希望将$\triangle A'AB$、$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 都“折到”$\triangle ABC$ 中，如果 A',B',C' 恰好重叠成一个点 M，那么③就成立了.

但是怎么证明 A',B',C' 重叠成一个点 M 呢？

有人认为将$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 折起来可以形成一个四面体，而

$$\begin{aligned}\angle A'+\angle B'+\angle C'&=\angle A+\angle B+\angle C\\&=\frac{1}{2}\times\text{六边形的内角和}\\&=\frac{1}{2}\times(6-2)\times180^\circ=360^\circ,\end{aligned} \quad ④$$

所以这个“四面体”的三个面正好成为一个面.

上面的想法，的确是自然的好想法. 但在逻辑上却有个大漏洞：

三个三角形：$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 能折成四面体

吗？

$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$ 能折成顶点为 B 的三面角 $B—AA'C$（即 $B—AB'C$）需要条件，即

$$\angle ABC<\angle A'BA+\angle B'BC. \quad ⑤$$

当 $\angle A'BA$，$\angle B'BC$ 都很小（都小于 $\frac{1}{2}\angle ABC$）时，就无法产生三面角 $B—AA'C$. 而题目的条件关于 $\angle A'BA$，$\angle B'BC$ 的大小，没有提供任何信息，所以无法证明可以折成上面所说的四面体.

能否改一下，作 A' 关于 AB 的对称点 M，再证明 M 也是 B' 关于 BC，C' 关于 CA 的对称点？

这条路可以走通，但非常麻烦，而且失去了原来想法中很可贵的东西：A'，B'，C' 地位是平等的.

思想还得解放一些. 为什么我们非把三个三角形：$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 装进 $\triangle ABC$ 这个框子里呢？

如果思想上没有这一个预先设定的框框，事情要好办得多.

另外开放一块地方，即任选一点 M，过 M 作射线 MA''，MB''，MC''，使

$$\angle A''MB''=\angle AA'B, \angle B''MC''=\angle BB'C$$

（请读者自己绘一草图）.

这时，由于④，

$$\begin{aligned}\angle C''MA''&=360^\circ-\angle A''MB''-\angle B''MC''\\&=360^\circ-\angle AA'B-\angle BB'C=\angle CC'A.\end{aligned}$$

再取定 A''，B''，C''，使

$$MA''=AA', MB''=BB', MC''=CC'.$$

这时容易证明

$$\triangle A'AB \cong \triangle MA''B'',\ \triangle B'BC \cong \triangle MB''C'',$$
$$\triangle C'CA \cong \triangle MC''A''.$$

即我们已经将$\triangle A'AB$，$\triangle B'BC$，$\triangle C'CA$ 拼成一个三角形，即$\triangle A''B''C''$.

剩下的事情是证明

$$\triangle A''B''C'' \cong \triangle ABC. \qquad ⑥$$

这是很容易的，因为在前面所得的全等三角形中对应边相等，所以

$$A''B''=AB,\ B''C''=BC,\ C''A''=CA. \qquad ⑦$$

于是由⑦得出⑥，从而③成立，本题结论成立.

跳出框框，另觅一块天地发展，是这种解法的主要思想.其实这就是几何证明中的"同一法".

17. 海外称王

隋朝末年，天下大乱，群雄逐鹿.《风尘三侠》中的老大虬髯客(另两位是红拂与唐朝开国元勋李靖)也想问鼎中原. 但后来见到李世民，自问不是他的敌手，便退到海外，到扶余国去称王了.

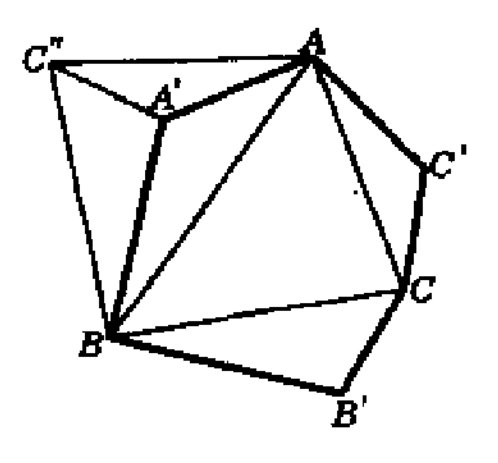


图 30

上节的问题，在$\triangle ABC$ 的框框内难以做文章. 除了另找一点 M 外，还可以退到边上去，即绕 A 点，将$\triangle AC'C$ 旋转成$\triangle AA'C''$(图 30).

这时 $A'C''=CC'=CB'$，$BA'=BB'$，

$$\begin{aligned}\angle C''A'B &= 360° - \angle AA'B - \angle AA'C'' \\ &= 360° - \angle AA'B - \angle C' = \angle B',\end{aligned}$$

所以 $$\triangle A'BC'' \cong \triangle B'BC.$$

再由 $BC''=BC$，$AC''=AC$ 得出

$$\triangle ABC'' \cong \triangle ABC.$$

从而 $$S_{\triangle ABC}=S_{\triangle ABC''}=\frac{1}{2}S_{AA'BB'CC'}.$$

本节的解法与上节类似，只不过将 M 选在 A'，图形紧凑些，但对称性却不如上节.

与占据“中原”的$\triangle ABC$ 相比，辅助线构成的图，只占一隅之地. 然而只要经营得好，反而能解决在$\triangle ABC$ 中难以解决的问题.

18. 整 齐 与 对 称

在几何计算中，应注意式子的整齐与对称.

设$\triangle ABC$ 的三边分别为 a，b，c. P 为三角形内一点，过 P 作三边的平行线，截各边于 D，E，F，G，H，I(图 31). 如果 $DE=FG=HI$，试求 DE.

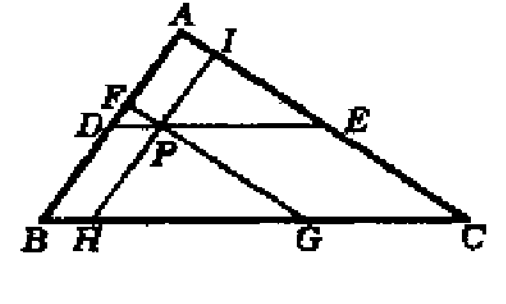


图 31

设 $DE=x$，又记 $PE=p$，$PF=q$，$PH=r$. 由平行线性质，易知

$$\frac{x}{a}=\frac{c-r}{c} \quad ①$$

及

$$\frac{x}{a}=\frac{b-(x-q)}{b}. \quad ②$$

①即

$$\frac{x}{a}=1-\frac{r}{c}. \quad ③$$

同理有

$$\frac{x}{b}=1-\frac{p}{a}, \quad ④$$

$$\frac{x}{c}=1-\frac{q}{b}. \quad ⑤$$

③+④+⑤得

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3-\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right). \quad ⑥$$

②即

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)=1+\frac{q}{b}. \quad ⑦$$

同理

$$x\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1+\frac{r}{c}, \quad ⑧$$

$$x\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)=1+\frac{p}{a}. \quad ⑨$$

⑦+⑧+⑨得

$$2x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=3+\left(\frac{p}{a}+\frac{q}{b}+\frac{r}{c}\right). \quad ⑩$$

⑥+⑩得

$$3x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=6.$$

于是 $$x=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}=\frac{2abc}{ab+bc+ca}.$$

解答中的"同理"就体现了整齐性、对称性．由于我们注意到这种整齐性、对称性，选择了适当的字母记号，所以只要将字母 a，b，c 及 p，q，r 进行轮换就可以由③得出④，⑤，由⑦得到⑧，⑨，并且最后恰好由⑥与⑩消去 p，q，r，求出 x．如果不注意这种整齐性、对称性，不仅计算繁复，而且茫无头绪，不知

出路何在.

另一种解法是利用三角形的高(当然也要注意式子的整齐与对称).

设 P 到各边的距离为 p_a, p_b, p_c,三角形的高为 h_a, h_b, h_c,则

$$\frac{x}{a}=\frac{h_a-p_a}{h_a},$$

即

$$h_a \cdot x = ah_a - ap_a.$$

将类似的三个等式相加,得

$$(h_a+h_b+h_c)x = 3\times 2S_{\triangle ABC} - 2S_{\triangle ABC} = 4S_{\triangle ABC}.$$

所以

$$\begin{aligned} x &= \frac{4S_{\triangle ABC}}{h_a+h_b+h_c} \\ &= \frac{4S_{\triangle ABC}}{\frac{2S_{\triangle ABC}}{a}+\frac{2S_{\triangle ABC}}{b}+\frac{2S_{\triangle ABC}}{c}} \\ &= \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}}. \end{aligned}$$

（三）春日兴致好

19. 昂蒂费尔师傅的奇遇

天气好，兴致也好的时候，可以读点书（包括小说书与数学书）.

法国的儒勒·凡尔纳写过很多科普小说，不仅普及了科学知识，而且小说的情节曲折、引人入胜；人物性格鲜明、栩栩如生. 令人爱不释手，非得一气读完不可. 其中《格兰特船长的儿女》、《神秘岛》、《十五岁的船长》等更是倾倒了我国四、五代读者（清末即有梁启超译的《十五岁的船长》在《新民丛报》上连载. 鲁迅、周作人也曾译过《地心游记》）.

在他写的《昂蒂费尔师傅奇遇记》（孔昭宇、马河清译，中国青年出版社，1981 年出版）一书中，昂蒂费尔师傅等人为了寻求宝藏，历尽艰险，先后来到马斯喀特、马永巴、斯匹次卑尔根三个岛. 但每一次都只找到一个金属匣，里面藏着一片羊皮纸，指示应当到下一个岛去寻找宝藏. 最后一次找到的羊皮纸已经被水浸湿一半. 前一半指出：

“……共同遗产继承人可直奔第四个小岛，三只装有黄金、钻石、珠宝的樟木桶就藏在该岛.”

但指示小岛位置的部分由于被水浸湿，字迹已模糊不清了，只能看出：

“小岛……位于……几何……定理…….”

好不容易辨认出最后一个字是：

"极".

大家无法猜测出小岛的位置，乘兴而来，兴尽而返.

回到家中，又过了两个多月.参与此事的朱埃勒和他的妻子爱诺卡特，偶然拨弄放在桌上的地球仪，无意中发现上面所说的三个小岛位于同一个圆上.朱埃勒恍然大悟(以下对译文稍作修改)：

"我们设想这三个小岛在同一平面上，用直线将它们两两相连，在每条线段的中央划一条垂线，这些垂线正好相交在圆心上.在地球仪上，也就是这个圆的极.第四个小岛肯定就在这一点!"

于是，他们发现第四个小岛，即卡米尔克总督藏宝的地方位于北纬三十七度二十六分，东经(以巴黎子午线为准)十度三十三分.

宝藏的下落，请读者去看原书，这里按下不表.且说一说上面涉及的几何定理，即

三角形三条边的垂直平分线交于一点，这点称为三角形的外心.以它为圆心，可以作一个圆通过三角形的三个顶点.这个圆称为三角形的外接圆.

因此，任意三个(不共线的)点(即三角形的三个顶点)，都在同一个圆上.经过两个多月的冥思苦想，朱埃勒才发现三个小岛位于同一个圆上，他的几何未免太差了，大概抵不上我国参加中考的学生.

不过，三个小岛是在球面上.把它们设想在一个平面上，第四个岛是圆的圆心.如果在地球仪上，那么包含第四个岛的部分就像罩在这个圆上的"瓜片小帽"，而第四个岛就是帽子的顶(清朝的官员在顶子上放一块宝石)，也就是"极".所以在球面上，极与圆心还是不同的(如果过圆心作一条直线与圆所

在的平面垂直，这条直线正好通过极）．在绘制平面的地图时，球面上的图形不可避免地产生变形．要在地图上寻找“极”，不是容易的事情．

顺便说一下，第四个小岛称为尤利亚岛．1831年在地中海中突然升起，正当英国和意大利为岛的主权争吵不休的时候，这个岛又突然消失了，只在海面上露了四个多月．我国作家鄂华曾以此为背景写过一个中篇小说《幽灵岛》．

20. 重　　心

如果两个小球 A，B 重量相等，那么它们的重心是 AB 的中点 D（这里我们将小球当作一个点）．即设想 A，B 用一个杆相连，顶住杆 AB 的中点 D 就可以达到平衡［图32(1)］．

A　D　B　　　　A　　　D　B

(1)　　　　　　(2)

图　32

如果球 A，B 的重量不等，重量的比是 $\frac{m}{n}$，那么重心 D 仍在 AB 上，而 $\frac{AD}{DB}=\frac{n}{m}$（即重心靠近重的一方）［图32(2)］．

如果三个重量相等的小球 A，B，C 构成三角形 ABC，要求它们的重心，在物理上可以分成两步：

先求出 B，C 的重心，即 BC 的中点 D，可以用重量为 $2(=1+1)$ 的小球放在 D 点，取代（去掉）放在 B，C 的小球．

再求 A，D 的重心．由于 D 处的重量是 A 处的2倍，所以重心 G 在 AD 上，并且分 AD 为 $2:1$（即 $AG=2GD$）．

当然，也可以先求出 A，B 的重心 F，再求 C，F 的重心（在 F 处放重量为2的小球）．或先求出 A，C 的重心 E，再求 B，E 的重心（在 E 处放重量为2的小球）．

于是，我们得出$\triangle ABC$的三条中线AD, BE, CF交于同一点G，这点是A, B, C的重心，分每条中线为$2:1$.

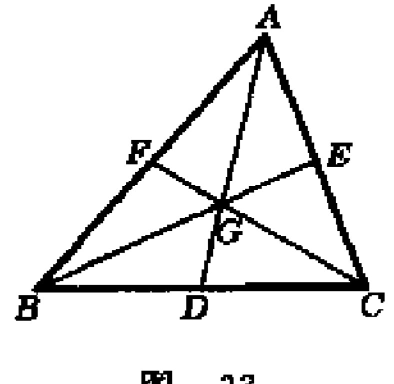


图 33

G也称为$\triangle ABC$的重心.

在计算线段的比值时，用上述物理方法特别方便. 例如

设D, E分别在$\triangle ABC$的边BC, AB上，并且

$$\frac{BD}{DC}=\frac{m}{n}, \quad \frac{AE}{EB}=\frac{h}{k}.$$

AD, BE相交于G. 求$\frac{AG}{GD}$.

在A, B, C处分别放上重量kn, hn, hm，则B, C的重心在D；A, B, C的重心在AD上. 同理，A, B, C的重心在CE上. 从而A, B, C的重心就是AD与CE的交点G.

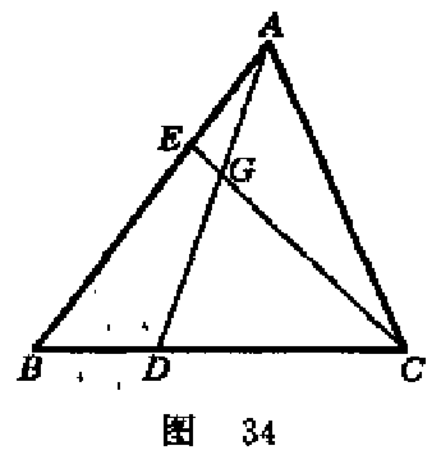


图 34

可在D处放重量$h(m+n)$，去掉B, C的重量. 所以

$$\frac{AG}{GD}=\frac{h(m+n)}{kn}.$$

特别地，当$m=h=1, k=n=2$时，

$$\frac{AG}{GD}=\frac{3}{4}.$$

21. 塞瓦定理

如果在$\triangle ABC$的顶点A, B, C处，分别放有重量p, q, r，那么如何确定这三点的重心？

我们在 AC 上取 E，使

$$\frac{CE}{EA}=\frac{p}{r}, \tag{①}$$

E 就是 A，C 两点的重心．从而 A，B，C 三点的重心应当在直线 BE 上．

再在 AB 上取 F，使

$$\frac{AF}{FB}=\frac{q}{p}, \tag{②}$$

则 F 是 A，B 的重心，A，B，C 的重心应当在直线 CF 上．

因此，A，B，C 的重心是 BE 与 CF 的交点 M．

同样，在 BC 上取 D，使

$$\frac{BD}{DC}=\frac{r}{q}, \tag{③}$$

则 A，B，C 三点的重心 M 也在 AD 上．因此 AD，BE，CF 三线共点（图 35）．

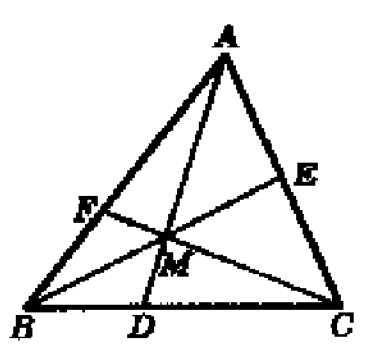


图 35

注意由①，②，③，我们得到

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=\frac{p}{r}\cdot\frac{r}{q}\cdot\frac{q}{p}=1. \tag{④}$$

这就导致塞瓦(Ceva)定理：

定理 设点 D，E，F 分别在 $\triangle ABC$ 的边 BC，CA，AB 上，则当且仅当

$$\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BD}{DC}=1 \tag{⑤}$$

时，AD，BE，CF 三线共点．

这个定理是意大利的水力工程师塞瓦在 1678 年发表的．

当条件⑤满足时，可以设

$$\frac{CE}{EA}=\frac{p}{r},\quad \frac{AF}{FB}=\frac{q}{p}, \tag{⑥}$$

p, q, r 为正数. 这时由⑤,

$$\frac{BD}{DC}=\frac{r}{q}. \tag{7}$$

在 A, B, C 分别放置重量 p, q, r, 如上所说三个点的重心 M 就是 AD, BE, CF 的公共点.

反过来, 如果三条线交于一点 M, 那么仍设⑥式成立, 并在 A, B, C 分别放置重量 p, q, r. 如上所说 BE, CF 的交点 M 就是 A, B, C 三点的重心, 从而 D 是 B, C 两点的重心, 并且⑦成立. 从而由⑥, ⑦得出⑤.

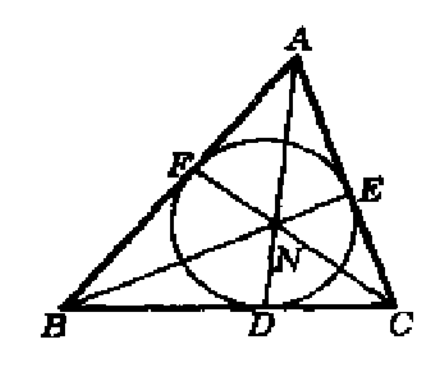


图 36

塞瓦定理在证明三线共点时, 有广泛的应用. 例如设内切圆与三边分别相切于 D, E, F (图 36), 则 $CE=DC$, $EA=AF$, $FB=BD$, 因此⑤式成立, 根据塞瓦定理, AD, BE, CF 交于一点 N. 这点称为奈格尔(Nagel)点.

22. 爱因斯坦认为优雅的证明

如图 37, 设直线 l 分别与 $\triangle ABC$ 的边(或边的延长线)相交于 D, E, F. 求证:

$$\frac{BD}{DC}\cdot\frac{CE}{EA}\cdot\frac{AF}{FB}=1. \tag{1}$$

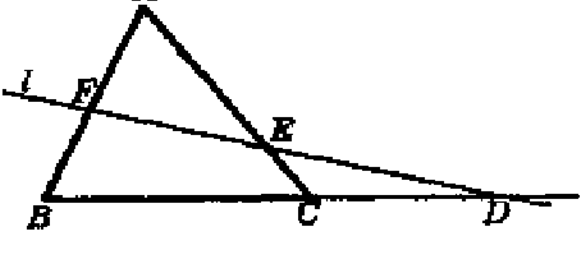


图 37

这个结论称为门奈劳斯(Menelaus)定理.

原来有一个证明是过 A 作 l 的平行线交 BD 于 X, 然后再利用比例关系导出①式.

大科学家爱因斯坦认为这样的证明是“丑陋”的，因为没有过其他两个顶点 B,C 作平行线，破坏了 A,B,C 的平等地位，即数学上的对称性.

爱因斯坦认为下面的证明才是优雅的：由面积

$$\frac{S_{\triangle AEF}}{S_{\triangle BFD}}=\frac{AF\cdot EF}{FB\cdot DF}, \quad ②$$

同样

$$\frac{S_{\triangle BFD}}{S_{\triangle CDE}}=\frac{BD\cdot DF}{DC\cdot DE}, \quad ③$$

$$\frac{S_{\triangle CDE}}{S_{\triangle AEF}}=\frac{DE\cdot CE}{EA\cdot EF}. \quad ④$$

将②，③，④相乘便得到①.

这一证明的优点是对称(证明中的“同样”或“同理”便体现了这种对称性). 但用到面积以及 l 上的线段 EF,DF 与 DE，稍嫌繁琐. 其实还可以更简单一些：

分别自 A,B,C 向 l 作垂线，设垂线的长为 p,q,r，则

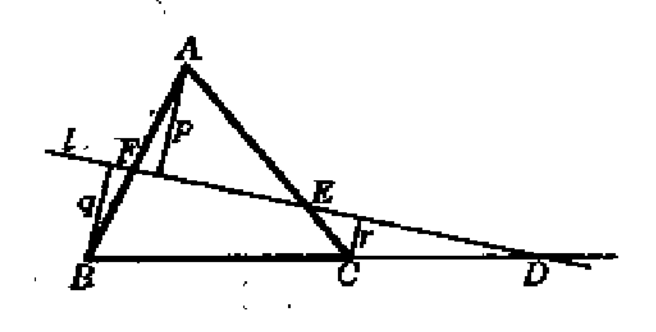


图 38

$$\frac{BD}{DC}=\frac{q}{r},\ \frac{CE}{EA}=\frac{r}{p},\ \frac{AF}{FB}=\frac{p}{q}.$$

三式相乘即得①.

这一证明也是对称的，爱因斯坦见到的话，一定会说：“Sehr Gut!”

23. 三角形的五心

三角形三条中线交于一点，这点称为重心.

三角形三边的垂直平分线交于一点，这点正好是三角形的外接圆的圆心，简称外心.

三角形的三条高交于一点，这点称为垂心. 要证明三条高交于一点，可以过三角形的每个顶点作对边的平行线，交成一个大三角形. 原三角形的三条高，正好是大三角形三条边的垂直平分线，因而原三角形的三条高交于一点，这点即大三角形的外心(图 39).

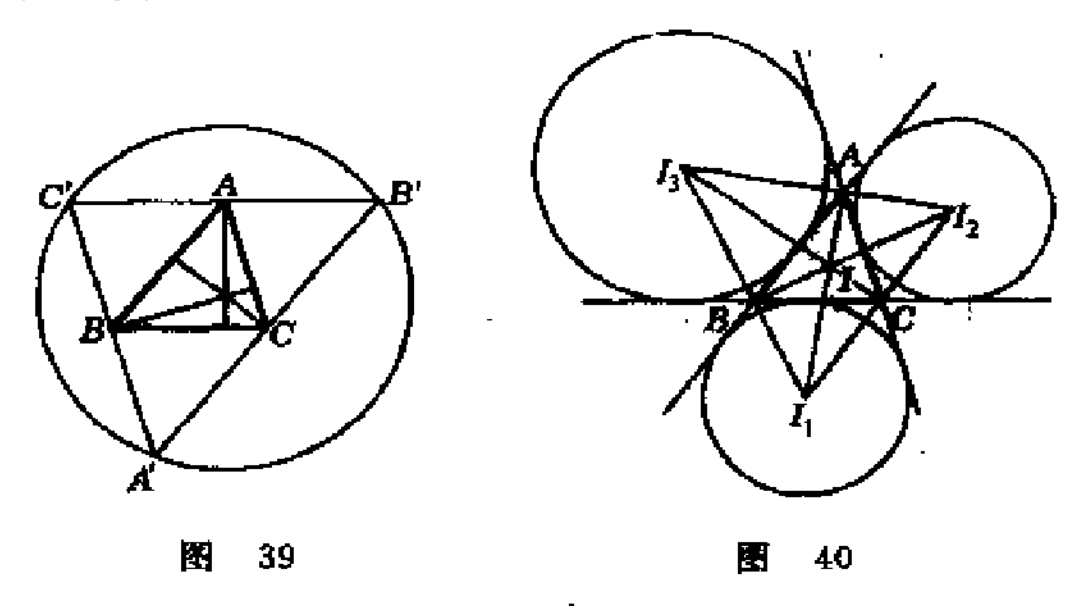


图 39　　　　图 40

三角形的三条内角平分线交于一点，这点是内切圆的圆心，简称内心.

三角形一条内角平分线与另两个角的外角平分线交于一点. 以这点为圆心可以作一个圆与三角形的一边及另两边的延长线相切，这个圆称为旁切圆. 旁切圆的圆心简称旁心. 三角形有三个旁心. 以三个旁心为顶点的三角形，其垂心恰好是原三角形的内心.

旁心也是常常用到的(如第 41 节). 现行教材删去有关旁心的内容,殊为可惜.

24. 垂心的一个性质

如图 41,已知$\odot O$是锐角$\triangle ABC$的外接圆,高AD的延长线交$\odot O$于F,H是垂心. 证明$HD=DF$.

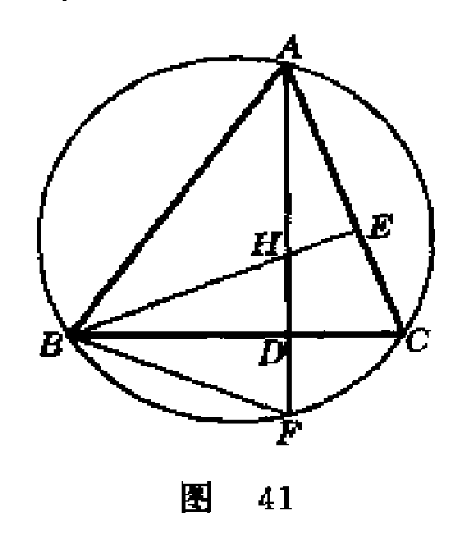


图 41

这道题,我读初中时就曾做过. 后来担任中学教师,教代数(当时代数与几何是分开的). 有个学生问我:

"老师会不会做几何题?"(学生以为教代数的不一定会做几何题,这是很滑稽的想法.)

我说:"试试看."

她就说了上面的题.

其实解法很简单:设BE是另一条高(当然也过垂心H),连接BF. 只需证明

$$\triangle BDH \cong \triangle BDF. \quad ①$$

已知$\angle BDH=\angle BDF=90°$,$BD=BD$,只需再找一组相等的对应角.

因为$\angle HBD=90°-\angle BHD=90°-\angle AHE=\angle HAE$,

而$\angle HAE=\angle FBD$，所以

$$\angle HBD=\angle FBD.$$

从而①成立，$HD=DF$.

本题在第 52 节中用到.

25. 逐步推广

我们知道，在$\triangle ABC$中，高AD,BE,CF相交于垂心H. 不难证明$\angle EDH=\angle FDH$.

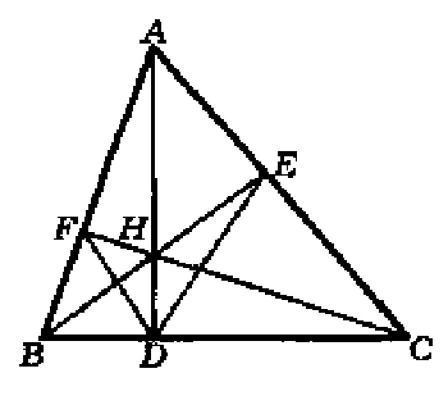


图 42

事实上，图 42 中有许多的四点共圆. 如由$\angle AEB=\angle ADB=90°$可知$D,E$都在以$AB$为直径的圆上，从而$\angle ADE=\angle ABE$. 又由$\angle HDB=\angle HFB=90°$可知$D,F$都在以$BH$为直径的圆上，从而$\angle ABH=\angle FDH$. 因此

$$\angle EDH=\angle FDH. \quad ①$$

(不难看出A,B,C,H正好是$\triangle DEF$的旁心与内心. 可与图 40 比较.)

如果AD仍然是高，但H只是AD上的一点，BH,CH分别交AC,AB于E,F，那么①仍然成立. 证法如下：

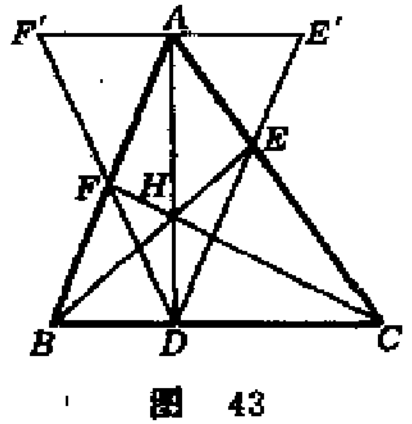


图 43

过A作BC的平行线，与DE,DF的延长线分别相交于E',F'(图 43)，易知

$$\frac{AE'}{AE}=\frac{CD}{DE},\quad \frac{AF'}{AF}=\frac{BD}{BF},$$

所以 $$\frac{AE'}{AF'}=\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{AE}{DE}.$$
由塞瓦定理，上式的值为 1，所以
$$AE'=AF'.$$

于是$\triangle DE'F'$的高 AD 平分 $E'F'$，从而①成立.

再进一步，设四边形 $ABDC$ 中，AD 平分$\angle BDC$. H 为 AD 上任一点，BH，CH 分别交 AC，AB 于 E，F，则①成立. 这是 1999 年全国高中联赛加试的第二题. 它相当于将图 39 中的线段 BC 变成折线 BDC.

证明基本上是"依葫芦画瓢"：

过 A 分别作 DC，BD 的平行线，分别交 DE，DF 的延长线于 E'，F'（图 44）.

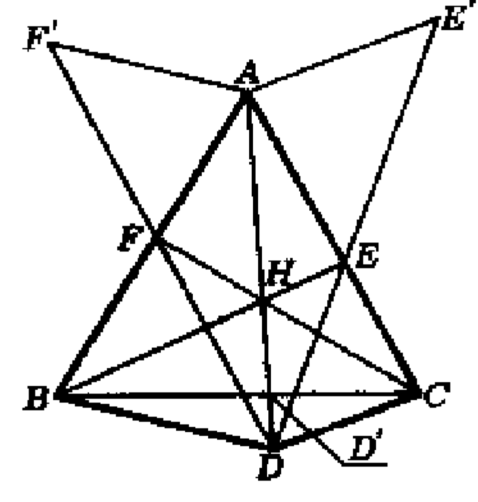


图 44

同样，
$$\frac{AE'}{AF'}=\frac{CD}{DB}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{AE}{DE}.$$

连接 BC，交 AD 于 D'. 由于 AD 平分$\angle BDC$，所以
$$\frac{CD}{DB}=\frac{CD'}{D'B},$$
代入上式得
$$\frac{AE'}{AF'}=\frac{CD'}{D'B}\cdot\frac{BF}{AF}\cdot\frac{AE}{DE}. \quad ②$$
②式右边依然为 1，从而仍导出 $AE'=AF'$.

因为
$$\angle E'AD=180^\circ-\angle CDA=180^\circ-\angle ADB$$
$$=\angle F'AD,$$
所以$\triangle E'AD\cong\triangle F'AD$，①成立.

26. 垂心乎？（一）

如图 45，如果 H 是$\triangle ABC$ 的垂心，那么 H 在高 AD 上，而且$\angle BHC=180°-\angle BAC$.

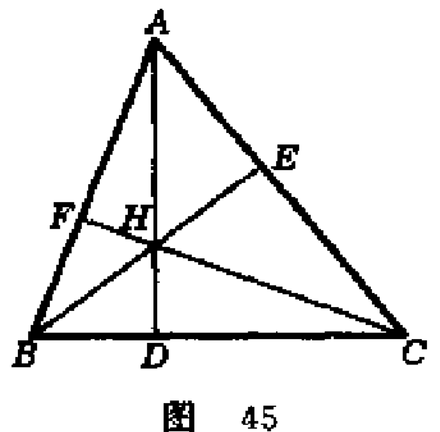


图 45

这个结论，证明不难，根据定义，H 在高 AD 上，H 也在高 BE，CF 上，所以

$$\begin{aligned}\angle BHC &= \angle EHF \\ &= 360°-\angle AEH-\angle AFH-\angle BAC \\ &= 360°-90°-90°-\angle BAC \\ &= 180°-\angle BAC.\end{aligned}$$

反过来，如果点 H 在$\triangle ABC$ 的高 AD 上，并且$\angle BHC=180°-\angle BAC$，那么 H 一定是$\triangle ABC$ 的垂心吗？

答案是肯定的，即上述条件是"H 是$\triangle ABC$ 的垂心"的充分必要条件.

这个结论证明不算难，但想出来也要费点功夫，读者不妨先试一试. 我们的证法如下：

如图 46，延长 AD 到 A'，使 $DA'=AD$，连接 $A'B$，$A'C$（即作$\triangle ABC$ 关于 BC 的对称图形）.

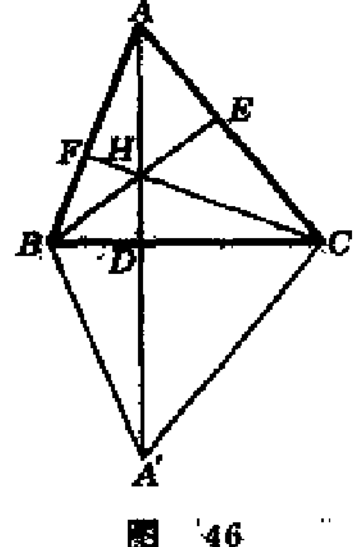


图 46

易知 $\angle BA'D=\angle BAD$,

$\angle BA'C=\angle BAC$.

因 $\angle BHC=180°-\angle BAC$,

故 $\angle BHC+\angle BA'C$

$=\angle BHC+\angle BAC=180°$,

从而 A',B,H,C 四点共圆，

$$\angle BA'D=\angle BCH.$$

于是 $\qquad\qquad\qquad \angle BAD=\angle BCH,$

$$\angle BFC=180^\circ-\angle BCH-\angle ABC$$
$$=180^\circ-\angle BAD-\angle ABC=180^\circ-90^\circ=90^\circ.$$

即 CF 是 $\triangle ABC$ 的高，H 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

27. 垂心乎？（二）

在锐角三角形 ABC 中，$AB\neq AC$. AD 是高，H 是 AD 上一点，连接 BH 并延长交 AC 于 E，连接 CH 并延长交 AB 于 F，已知 B,C,E,F 四点共圆，问：H 是否一定是 $\triangle ABC$ 的垂心？证明你的结论.

本题是 1998 年教育部高中理科试验班的入学试题，答案是肯定的，即 H 一定是 $\triangle ABC$ 的垂心.

如图 47，为了证明这一点，我们利用对称性（当然也有其他的证法）. 虽然现在高 AD 不是 $\triangle ABC$ 的对称轴，但我们可以将 $\triangle ABD$ 沿 AD 翻折过去，也就是在 DC 上取 B'，使 $DB'=DB$.

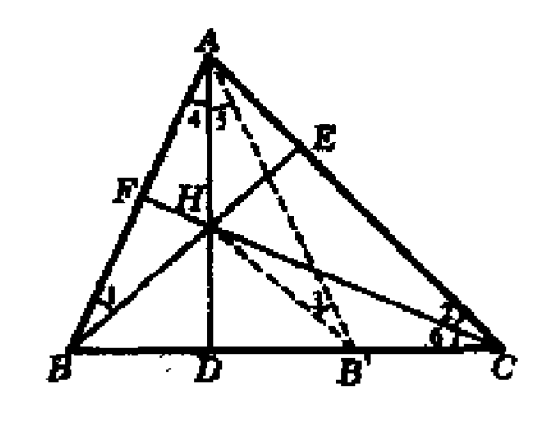


图 47

由对称性，$\angle 3=\angle 1$. 由已知 B,C,E,F 共圆，$\angle 1=\angle 2$，所以 $\angle 3=\angle 2$，B',C,A,H 四点共圆. 从而 $\angle 5=\angle 6$.

又由对称性，$\angle 4=\angle 5$，所以 $\angle 4=\angle 6$，A,F,D,C 四点共圆，从而 $\angle AFC=\angle ADC=90^\circ$，$H$ 是 $\triangle ABC$ 的垂心.

由于利用了对称性，本题的图形"集中"到右侧，才产生了

许多“四点共圆”，所以“将$\triangle ABD$沿AD翻折”是这个解法的关键步骤.

28. 位似、欧拉线

图形可以放大或缩小，最简单的方法就是位似. 如图 48，任取一点O作为位似中心，对任一点A，在射线OA上取一点A'，使

$$OA' : OA=\lambda,$$

λ是一个给定的正实数，A'称为A的像.

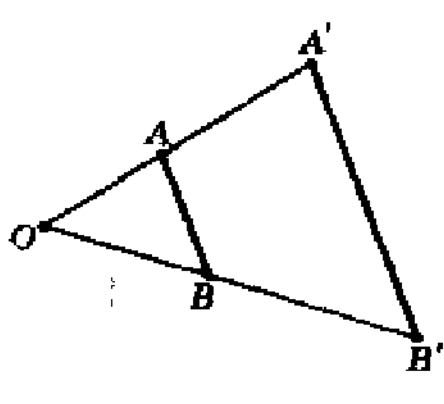


图 48

如果B'是B的像，那么O、B、B'共线，

$$OB' : OB=\lambda,$$

从而$A'B' /\!/ AB$，并且

$$A'B' : AB=\lambda.$$

λ也可以取负值，这时A'在射线OA的反向延长线上.

设$\triangle ABC$的中线为AD、BE、CF，重心为G. 那么，以G为位似中心，取$\lambda=-\frac{1}{2}$时，A、B、C的像分别为D、E、F，从而$\triangle ABC$的像是$\triangle DEF$. $\triangle ABC$的外接圆的像，就是$\triangle DEF$的外接圆. 后者常称为九点圆或欧拉圆.

由于$\triangle ABC$的垂心H的像，应当是$\triangle DEF$的垂心，即O点，所以H、O、G三点共线，并且O在HG的延长线上，

$$OG=\frac{1}{2}GH.$$

这条直线OG，称为欧拉线.

$\triangle ABC$的外心O的像，应当是九点圆的圆心N. N，O，G

三点共线，并且 N 在 OG 的延长线上，

$$GN=\frac{1}{2}OG.$$

因此，$ON=OG+GN=\frac{3}{2}OG$，而

$$NH=GH-GN=2OG-\frac{1}{2}OG=\frac{3}{2}OG,$$

所以 N 是 OH 的中点.

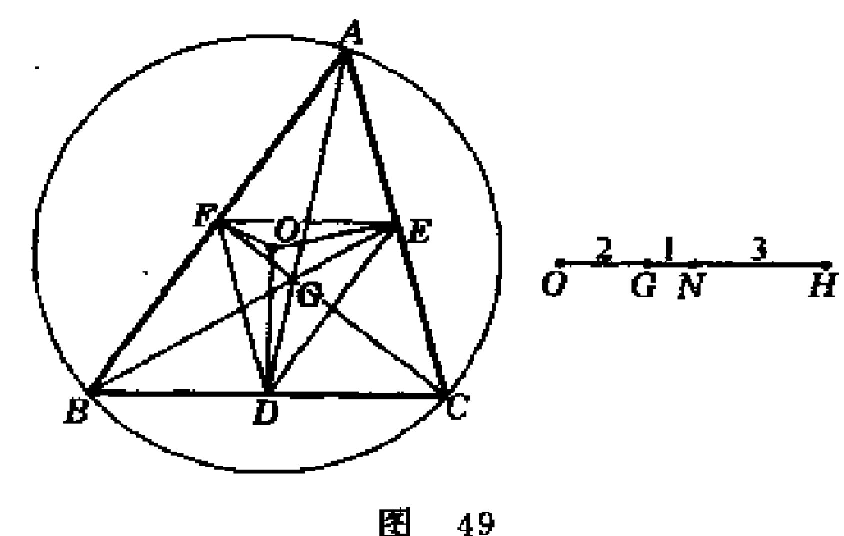


图 49

O,G,N,H 四点位置如图 49 所示，其中

$$OG:GN:NH=2:1:3.$$

九点圆半径正好是外接圆的$\frac{1}{2}$. 在下面第 31 节将要提到

$$R\geqslant 2r,$$

所以九点圆不小于内切圆.

不仅如此，内切圆正好与九点圆内切（当且仅当三角形是正三角形时，$R=2r$，此时九点圆与内切圆重合）. 这是德国数学家费尔巴哈（K. W. Feuerbach，1800—1834）在 1822 年的著作中首先提出并证明的. 有兴趣的读者可以看《近代欧氏几何学》（R·A·约翰逊著，单墫译，上海教育出版社 1999 年出版）.

顺便说一下，费尔巴哈有一个弟弟（L. A. Feuerbach，

1804—1872)，是一位大名鼎鼎的哲学家，对马克思(Karl Marx，1818—1883)有很大的影响.

29. 九 点 圆

顾名思义，九点圆通过九个特殊的点，其中三点是三边的中点，另外六个点，我们将在下面加以说明.

首先，我们知道外心 O、重心 G、垂心 H 三点共线，并且 $OG:GH=DG:GA=1:2$，所以

$$AH=2\times OD. \qquad ①$$

于是取 AH 的中点 A_1(图 50)，便有

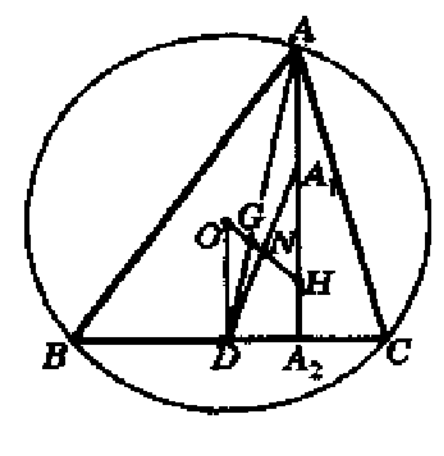


图 50

$$A_1H \mathrel{\underline{\parallel}} OD,$$

从而四边形 $ODHA_1$ 是平行四边形，OH 与 A_1D 互相平分. 又我们已经知道九点圆的圆心 N 是 OH 中点，所以 N 也是 A_1D 的中点. 从而 A_1 也在以 N 为中心，ND 为半径的九点圆上，并且 A_1D 是九点圆的直径.

设 AA_2 是高，那么 $\angle A_1A_2D=90°$，所以 A_2 也在九点圆上.

面此九点圆除通过三边中点外，还通过线段 AH，BH，CH 的中点，通过三条高的垂足，它是名副其实的九点圆.

30. 西 摩 松 线

如图 51，设 $\triangle ABC$ 的外接圆为 $\odot O$，从圆上任一点 P 到

三边作垂线，垂足分别为 D,E,F，则 D,E,F 三点共线.

证明不难，因为有很多的四点共圆可以利用. 例如 B,P,D,F 四点共圆，P,D,C,E 四点共圆，当然还有 A,B,P,C 四点共圆.

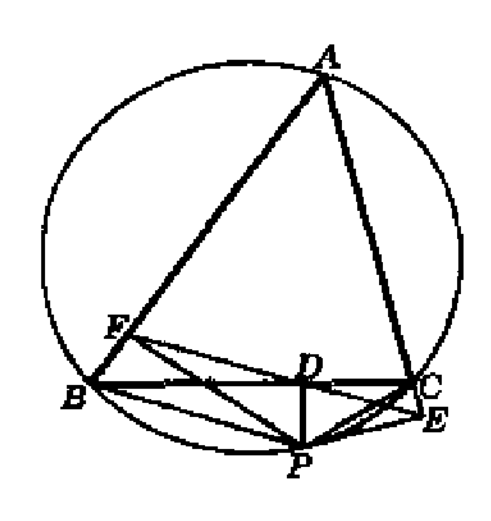


图 51

于是

$$\angle PDE=\angle PCE=\angle ABP$$
$$=180^\circ-\angle PDF,$$

即 $\angle PDE+\angle PDF=180^\circ$，所以 D，E,F 三点共线.

这条直线通常称为西摩松(Simson)线. 实际上它与西摩松毫无关系，而是 1797 年由华莱士(W. Wallace)首先发现的. 张冠李戴不仅出现在中国，外国这样的例子更多.

上述西摩松定理的逆命题也是成立的：

如果点 P 到 $\triangle ABC$ 三边的垂线的垂足共线，那么 P 必在 $\triangle ABC$ 的外接圆上.

证明与上面大同小异，mutatis mutandis.

31. 欧 拉 公 式

欧拉(Euler，1707—1783)是 18 世纪的科学巨人，他的全集长达 45 册，仅目录就有 51 页，被人们誉为“大家的导师”.

欧拉对平面几何的贡献很多：欧拉线、欧拉圆、欧拉公式、欧拉定理.

这一节，我们就——按照拉普拉斯的说法——“读读欧拉”，专门说一下欧拉公式.

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，内心为 I，外接圆半径为 R，内切

圆半径为 r，又记外心、内心的距离 OI 为 d，则有

$$d^2=R^2-2Rr. \quad ①$$

①称为欧拉公式.

为了证明①，我们先将它改成

$$R^2-d^2=2Rr. \quad ②$$

②式左边是点 I 对于$\odot O$ 的幂：过圆内任一点 P 的弦被 P 分成两个部分，这两部分的乘积是一个定值，称为 P 关于$\odot O$ 的幂. 事实上，如果将 OI 延长交圆于 E，F，那么

$$\begin{aligned} R^2-d^2 &=(R+d)(R-d)\\ &=(EO+OI)(OF-OI)\\ &=EI\times IF. \end{aligned}$$

图 52

因此，设 AI 交$\odot O$ 于 M，则

$$R^2-d^2=MI\times IA. \quad ③$$

（③也可以直接证明：设 AM 的中点为 N，则 $R^2-d^2=MN^2-NI^2=(MN+NI)(MN-NI)=MI\times IA$.）

因此，只需证明

$$2Rr=MI\times IA, \quad ④$$

或写成比例式

$$\frac{2R}{MI}=\frac{IA}{r}. \quad ⑤$$

为了证明⑤，应当寻找两个相似的三角形. 一个以长 IA，r 为边；另一个以长 $2R$，MI 为边. 前一个不难找，图 53 中的$\triangle IDA$ 就是，D 是内切圆与 AC 的切点. 后一个也必须是直角三角形，所以一边是直径

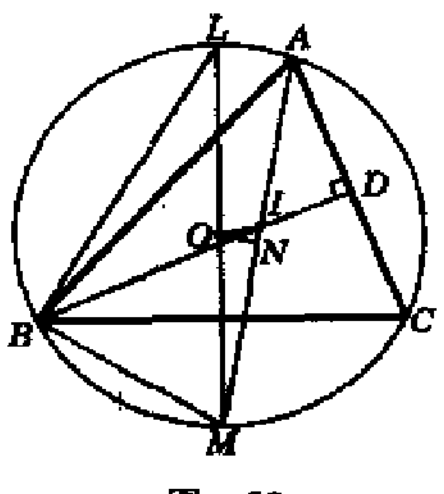


图 53

ML，另一个顶点也应当在圆上. $\triangle MBL$ 就满足要求.

容易证明

$$MB=MI$$

$\left(\text{利用}\triangle MBI=\angle MIB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle BAC)\right)$，

$$\angle MLB=\angle NAD=\frac{1}{2}\angle BAC$$

(M 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点).

因此⑤成立，从而①成立.

因为 $d^2\geqslant 0$，所以由欧拉公式得出一个副产品，即

$$R\geqslant 2r.$$

这在第 28 节中也曾说过.

32. 拿 破 仑 定 理

据说法国皇帝拿破仑一世（Napoléon I，1769—1821）发现了下面的定理：

以任一三角形 ABC 的边为边向外作正三角形，三个正三角形的中心 O_1，O_2，O_3 组成一个正三角形(图 54).

图 54

这个定理有许多种证明. 这里介绍一种(采用“运动”的说法)：

将 $\triangle C'AC$ 绕 A 旋转 60°，则 AC' 与 AB 重合，AC 与 AB' 重合，因此 $C'C=B'B$.

将 $\triangle O_3AO_2$ 绕 A 旋转 30°，然后按比例 $\frac{\sqrt{3}}{3}:1$ 放大，

则 O_3 与 C' 重合，O_2 与 C 重合．因此

$$O_2O_3=\frac{\sqrt{3}}{3}C'C=\frac{\sqrt{3}}{3}B'B.$$

同理可得

$$O_3O_1=O_1O_2=\frac{\sqrt{3}}{3}C'C.$$

所以 $\triangle O_1O_2O_3$ 是正三角形．

这个定理有各种等价的说法，例如：

以任意三角形 ABC 的边为底向外作底角为 30° 的等腰三角形，则三个等腰三角形的顶点 O_1, O_2, O_3 组成正 $\triangle O_1O_2O_3$.

这个定理还有各种变形，比如：$\triangle ABC$ 退化为线段 BC，A 为 BC 中一点；将向外作改为向内作等等．

这个定理还可以加以推广．首先考虑四边形 $ABCD$，以它的各边为边向外各作一个正方形，连接四个正方形的中心 O_1, O_2, O_3, O_4．四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 不是正方形，但是 $O_1O_3=O_2O_4$，并且 $O_1O_3\perp O_2O_4$．如果取四边形 $O_1O_2O_3O_4$ 各边的中点，再把它们连接起来，将到的恰好是一个正方形（为什么？请读者自己证）．这样看来，对于四边形需作两次：首先以各边为底向外作顶角为 $\frac{360°}{4}$ 的等腰三角形，连接各个顶点，得一四边形．再以这个四边形的各边为底向外作顶角为 $\frac{360°}{4}\times 2$ 的等腰三角形（实际上就是取各边中点），连接各个顶点，得到的一定是正方形．

推而广之，对于 n 边形需照此作 $(n-2)$ 次，各次所作等腰三角形的顶角为

$$\frac{360°}{n},\ \frac{360°}{n}\times 2,\ \frac{360°}{n}\times 3,\ \cdots,\ \frac{360°}{n}\times(n-2).$$

这个定理称为道格拉斯-纽曼定理，证明可见《复数计算与几何证题》(常庚哲著，上海教育出版社出版).

有趣的是，上面的作图顺序可以交换. 例如对四边形，可以先取各边中点得一平行四边形，再以这平行四边形各边为底边向外作等腰直角三角形，则这个等腰三角形的顶点组成正方形. 这个事实是不难证明的.

33. 蝴蝶定理

如图 55，在⊙O 中，设 P 为弦 EF 的中点. 过 P 再作两条弦 AC，BD. 连接 BC，AD，分别与弦 EF 相交于 Q，R，则 $RP=PQ$.

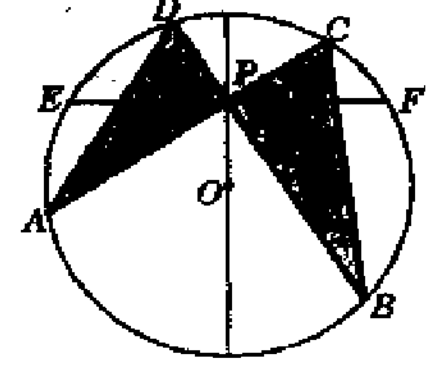


图 55

图形像一只翩翩起舞的蝴蝶，因此，上述结论也就称为“蝴蝶定理”.

蝴蝶定理的证法很多，但都不太容易. 我们还是利用“对称”来证.

直线 OP 是⊙O 与弦 EF 的对称轴. 设 A 关于 OP 的对称点为 A'. A' 当然也在⊙O 上，而 R 的对称点应当是 Q，所以应有

$$\angle PA'Q=\angle PAR=\angle PBC, \qquad ①$$

从而 A'，Q，P，B 应当四点共圆(图 56).

但 R 的对称点是 Q，正是要证明的，不能用它作为根据推出①及有关的四点共圆；相反地，我们要由四点共圆导出①，从而 R 的对称点是 Q. 不过，R 的对称点应当是 Q，启发我们去证 A'，Q，P，B 共圆. 这点启发是很有用的.

要证四点共圆，当然要用角的关系，①是要证的，不能用. 能用哪两个角呢？

注意由 A' 与 A 的**对称性**，

$$\angle A'PF=\angle APE,$$

而 $\angle A'BC$ 正好是 $\widehat{A'C}$ 的度数的一半，

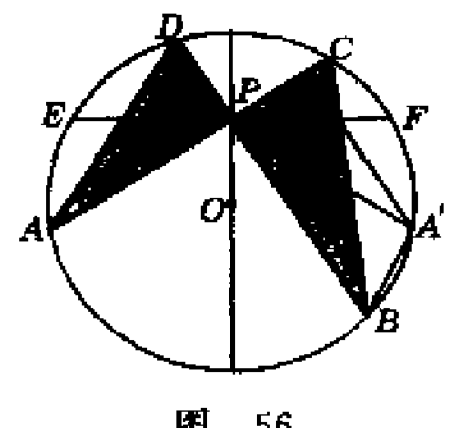


图 56

$$\widehat{A'C}=\widehat{A'F}+\widehat{FC}=\widehat{AE}+\widehat{FC},$$

所以
$$\angle A'BC=\angle A'PF.$$

从而 A'，B，P，Q 四点共圆，①成立，Q 是 R 关于 OP 的对称点.

蝴蝶定理有各种变形和推广，一种最常见的变形如下：

设 P 为⊙O 外一点，过 P 作割线 AC、BD. 又过 P 作 OP 的垂线，这垂线分别与直线 AD、BC 相交于 R，Q，则 $RP=PQ$（图 57）.

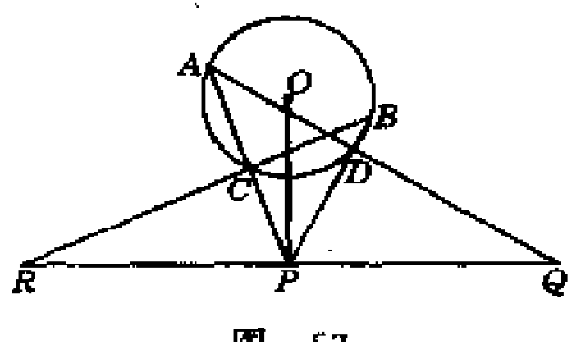


图 57

证法与上面基本相同（垂线相当于弦 EF）.

蝴蝶定理的一般情况可以叙述如下：

如果直线 l 与二次曲线 C_1 相交于 A_1，A_2，与二次曲线 C_2 相交于 B_1，B_2，那么对于由 C_1，C_2 所形成的二次曲线束中的任一条二次曲线，设它与 l 的交点为 D_1，D_2，则

$$\frac{D_1A_1\cdot D_1A_2}{D_1B_1\cdot D_1B_2}=\frac{D_2A_1\cdot D_2A_2}{D_2B_1\cdot D_2B_2}.$$

34. 平方差与根轴

本讲介绍两种轨迹.

设 O_1,O_2 为定点. 动点 P 到 O_1,O_2 的距离的平方差

$$PO_1^2-PO_2^2=\text{定值 } a,$$

求 P 的轨迹.

线段的平方,启示我们利用勾股定理.

连接 O_1O_2,设 P 向 O_1O_2 所作垂线的垂足为 Q(图 58),则由勾股定理,

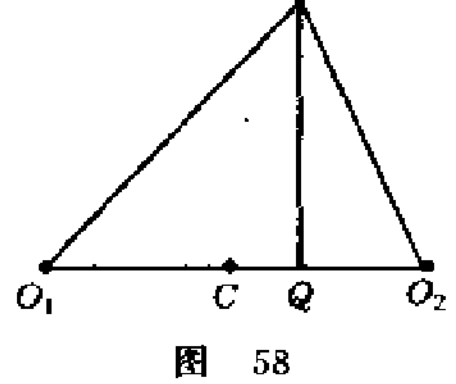


图 58

$$QO_1^2-QO_2^2=PO_1^2-PO_2^2=a.$$

设 O_1O_2 的中点为 C,则

$$\begin{aligned}&QO_1^2-QO_2^2\\&=(QO_1+QO_2)(QO_1-QO_2)\\&=O_1O_2\times 2CQ,\end{aligned}$$

从而

$$CQ=\frac{a}{2\times O_1O_2} \qquad ①$$

为定值. C 为定点,所以 Q 也为定点. P 在过 Q 并且与 O_1O_2 垂直的直线上.

反之,如果 P 在所说垂线上,那么

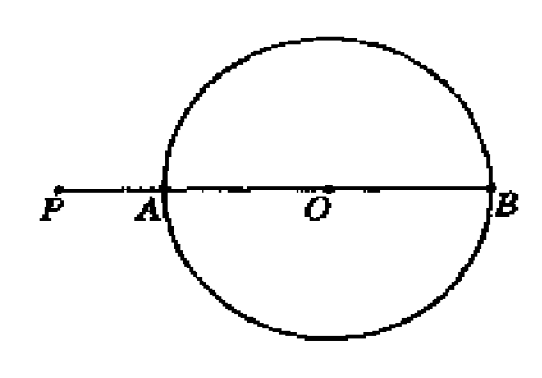
$$PO_1^2-PO_2^2=QO_1^2-QO_2^2,$$

而且 $$QO_1^2-QO_2^2=O_1O_2\times 2CQ=a.$$

因此 P 点的轨迹就是所说的垂线.

对于一个圆,过 P 作直线交圆于 A,B,则 $PA\cdot PB$ 称为 P 关于这个圆的幂(图 59).

熟知这个幂与所作直线的位置无关,而且设⊙O 的半径



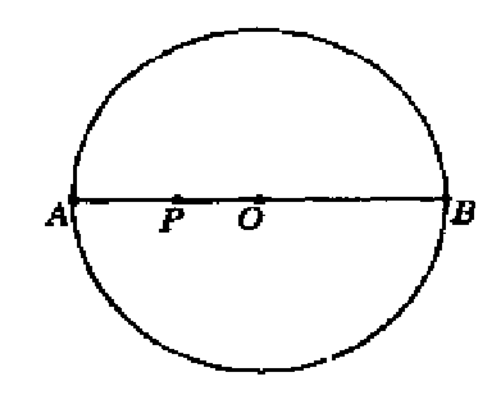


图 59

为 R，则不论 P 在圆内或圆外，所说的幂

$$PA\times PB=(PO-AO)\times(PO+OB)=PO^2-R^2$$

（P 在圆外时，幂为正；P 在圆内时，幂为负．如果你不喜欢将线段与正负联系，可以取 PO^2-R^2 的绝对值作为幂）．

已知定圆⊙O_1，⊙O_2，动点 P 到这两个圆的幂相等，求 P 的轨迹．

设这两个圆的半径分别为 r_1，r_2，则有

$$PO_1^2-PO_2^2=r_1^2-r_2^2,$$

因此 P 的轨迹是一条垂直于连心线 O_1O_2 的直线．这条直线称为根轴．

当⊙O_1，⊙O_2 相切时，根轴就是过切点的公切线．

当⊙O_1，⊙O_2 相交时，根轴就是公共弦所在的直线．

（四）请来看小花

35. 完全不用三角

思维有各种方式.算术的、代数的、几何的、三角的、……各有千秋，不能说这一种比那一种好，或者某一种比另一种差，正如小花，我们应当欣赏，而不必多加褒贬.

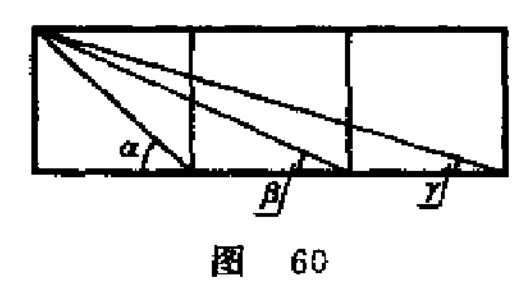


图 60

如图 60，三个正方形排在一起.证明

$$\alpha+\beta+\gamma=90°.$$

本题用三角可以证明.完全不用三角，怎么证？

显然 $\alpha=45°$，所以只需证明

$$\beta+\gamma=45°.$$

为此我们再作三个正方形，使 β 与 γ 可以"拼"在一起.

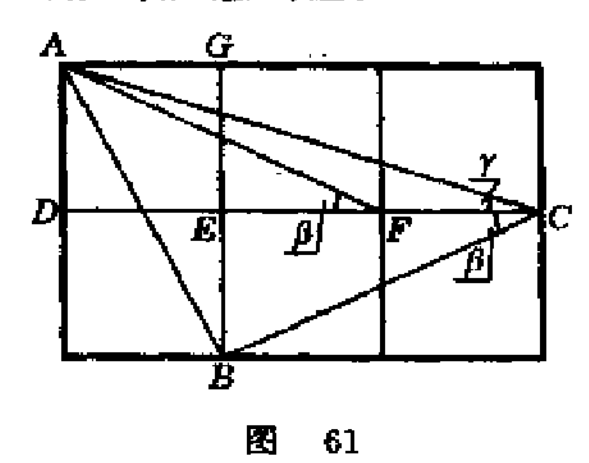


图 61

容易看出 $\angle BCE=\angle AFD=\beta=\angle ABG$，所以

$$\angle ABC=\beta+\angle EBC=90°.$$

又易知 $AB=BC$，所以 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形，即

$$\angle ACB=45°,$$

$$\beta+\gamma=45°.$$

36. 掩 卷 一 思

悬念，电影、电视中常用的手法，其实“古已有之”．中国的章回小说家，写到紧要关头，或者“欲知后事如何，且听下回分解”，或者故弄狡狯，请君“掩卷一思”．

这“掩卷一思”正是学习数学的一个好方法．遇到问题，不宜急着看解答，先想一想：

“怎样去解？”，“结果如何？”

然后对照下文，是“彼此暗合”，“所见略同”，还是“见仁见智”，“各有千秋”．

坚持“一思”，学力必有长足的进步．

下面的一道问题，请您看完题目后掩卷一思．

已知四边形 $ABCD$ 的边 AB，BC，CD 与 DA 分别等于四边形 $A'B'C'D'$ 的边 $A'B'$，$B'C'$，$C'D'$ 与 $D'A'$，并且 $AB \parallel CD$，$B'C' \parallel D'A'$．证明这两个四边形都是平行四边形．

不知读者是否遇到困难，笔者在解这道题时，确确实实走了些弯路，然后才发现问题是一个几何不等式，用到的知识极为基本，起关键作用的是三角形的两边之和大于第三条边．

我们只需证明 $AB=CD$．如果结论不成立，不妨设 $AB>CD$，$BC>DA$．

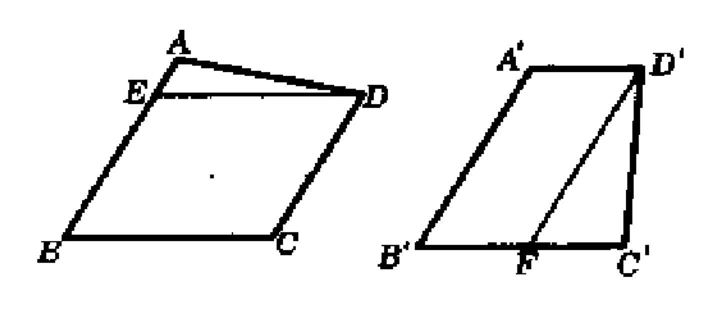


图 62

如图 62，在线段 AB 上取 E 使 $BE=CD$，则四边形 $EBCD$ 是平行四边形，所以 $ED=BC'$.

同样，在线段 $B'C'$ 上取 F 使 $B'F=A'D'$，则有 $D'F=A'B'$. 于是

$$AB-CD=AE>ED-AD=BC-AD=B'C'-A'D'$$
$$=FC'>D'F-C'D'=A'B'-C'D'=AB-CD.$$

矛盾！

37. 意 料 之 外

在正方形 $ABCD$ 的边 BC，CD 上分别取点 M，N，使得 $CM+CN=AB$. AM，AN 将对角线 BD 分为三条线段，证明这三条线段一定能组成三角形，而且这三角形有一个角为 60°.

这道题似乎需要相当复杂的计算. 然而，有一个优雅的解答完全不用计算，这是非常出人意料的事.

考虑以正方形 $ABCD$ 为底的正方体 $A_1B_1C_1D_1-ABCD$. 在 A_1B_1 上取 N_1，在 A_1D_1 上取 M_1，使 $A_1N_1=CM$，$A_1M_1=CN$. AN_1 与 A_1B 相交于 Q_1，AM_1 与 A_1D 相交于 P_1（图 64）.

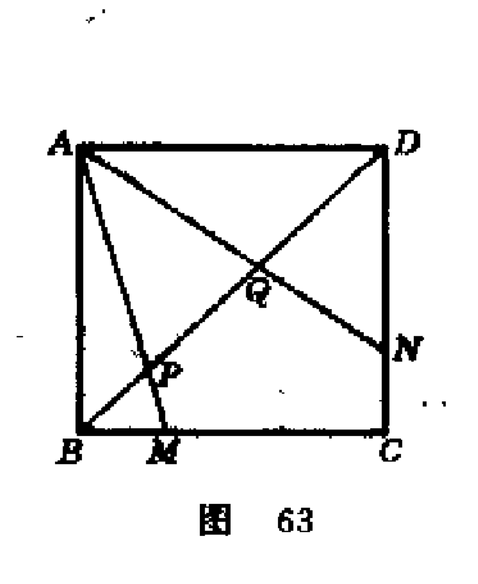


图 63

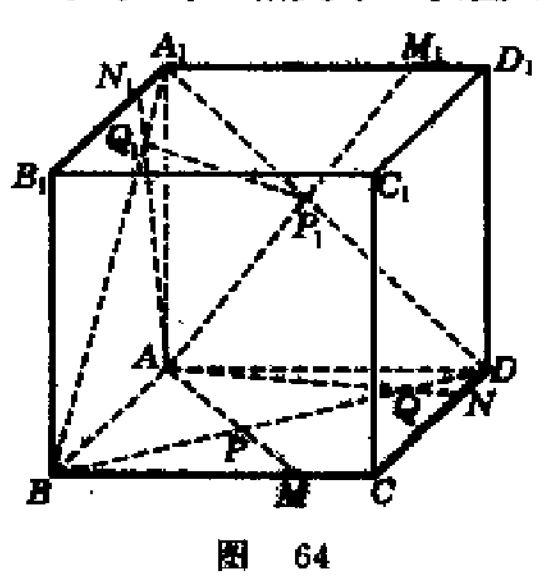


图 64

由于 $A_1D=DB=A_1B$，所以$\angle DA_1B=60°$. 我们只需证明$\triangle A_1P_1Q_1$ 的三条边恰好等于 BD 上的三条线段.

易知 $M_1N_1=MN$. 又 $A_1M_1=CN=BC-CM=BM$，所以 $AM_1=AM$. 同理 $AN_1=AN$. 于是 $\triangle AM_1N_1\cong\triangle AMN$，$\angle M_1AN_1=\angle MAN$. 易知 $AP_1=AP$，$AQ_1=AQ$，从而由 $\triangle P_1AQ_1\cong\triangle PAQ$ 得 $P_1Q_1=PQ$.

又由 $A_1M_1=BM$ 及正方形 $A_1B_1C_1D_1$ 与 $BADC$ 全等，立即得出 $A_1P_1=BP$. 同理 $A_1Q_1=DQ$. 证毕.

38. 平行四边形

设$\odot O$ 的弦 AC，BD 相交于 K，而 M，N 分别是$\triangle AKB$，$\triangle CKD$ 的外心. 求证：

$$OM=KN. \quad ①$$

先来画图，$\odot O$ 及弦 AC，BD 均不难画. K 点亦立即定出. 但 M，N 比较难作. M 在弦 AB 的垂直平分线上. 而过 O 作 AB 的垂线，这垂线必平分 AB，所以 M 在这条垂线上. 同理 N 在 CD 的、过 O 的垂线上(图 65).

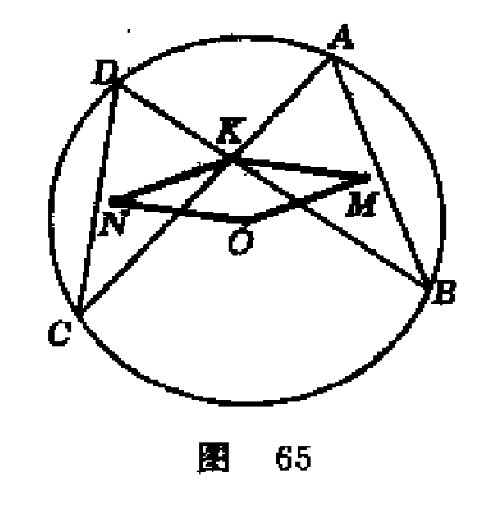


图 65

如果①成立，那么根据同样理由应有

$$ON=KM. \quad ②$$

①，②表明四边形 $OMKN$ 是平行四边形. 所以过 K 分别作直线与上述两条垂线平行，得出的交点就是 M，N.

因为平行四边形的对边相等，所以只要证明确实有

$$NK\,/\!/\,OM,\ MK\,/\!/\,ON, \quad ③$$

①就成立了. 为此只要证

$$NK \perp AB, \quad MK \perp CD. \tag{4}$$

注意对一个三角形，例如 $\triangle KCD$，外心 N 与顶点的连线 NK 与边 KC 所成的角为

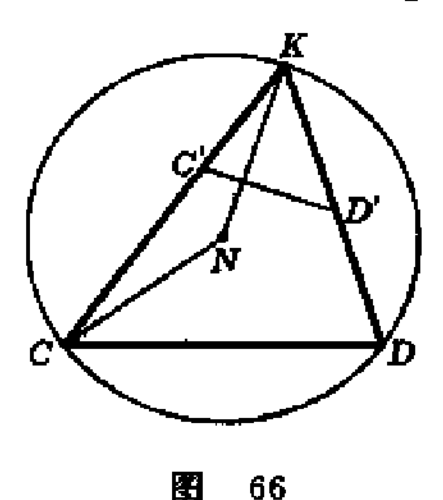


图 66

$$\angle NKC = \frac{1}{2}(180^\circ - \angle CNK)$$

$$= \frac{1}{2}(180^\circ - 2\angle D)$$

$$= 90^\circ - \angle D.$$

如果 $C'D'$ 与 CD 关于 KC, KD 逆平行(即 C', C, D, D' 四点共圆)，那么

$$\angle C' + \angle NKC' = \angle D + \angle NKC' = 90^\circ.$$

即 NK 与 CD 的(关于 KC, KD 的)逆平行线垂直. 而 AB 正是 CD 关于 KC, KD 的逆平行线，所以

$$NK \perp AB.$$

(不用逆平行线的说法，由

$$\angle A + \angle NKC = \angle D + \angle NKC = 90^\circ$$

亦可直接得出.)

同理 $MK \perp CD$. 于是①成立.

39. 边界形状

质点在第一象限及正 x, y 轴上运动. 在 x 轴上的速度为每秒 2 个单位长，在其他各点的速度均为每秒 1 个单位长. 质点从原点出发，运动 1 秒钟，求它所能达到的区域的边界是什么?

这原是一道物理竞赛题．后来被用作上海十所重点中学联合考试的试题．

先来探索一下边界的形状．

沿 x 轴可走到 $A(2,0)$．这点当然是边界上的点．

以原点 O 为圆心，1 为半径在第一象限圆 $\frac{1}{4}$ 圆．圆周上的点，都是质点可以达到的．但却不一定是边界上的点，因为质点可能达到更远的地方．

质点可以在 x 轴上行 t 秒$(0\leqslant t\leqslant 1)$，然后沿一条在第一象限的射线运动$(1-t)$秒．即先行到 $B_t(2t,0)$，然后行到以 B_t 为圆心，$1-t$ 为半径的圆（在第一象限的部分）上．

于是，我们可以作出这些圆（在第一象限的部分）．它们的圆心 $B_t(2t,0)$在 x 轴上，半径为 $1-t$，而 $0\leqslant t\leqslant 1$（当 $t=0$ 时，即以原点为圆心的圆；当 $t=1$ 时，即一个点 A）．

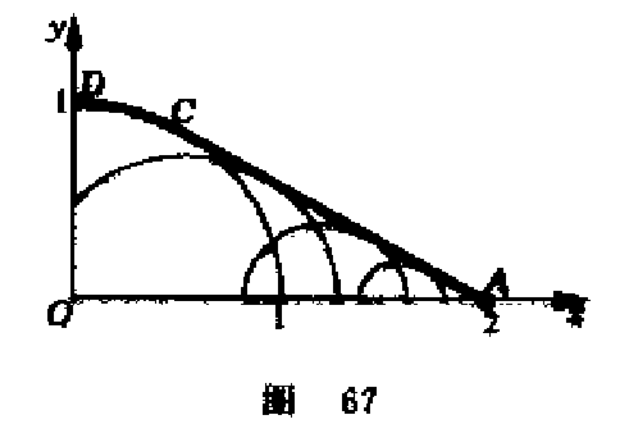


图 67

从所作的图（图 67）可以看出所说的边界由一条圆弧与一条线段组成．

圆弧在以 O 为圆心，1 为半径的圆上，从 $D(0,1)$ 到点 C，所含度数为 30°，即$\angle DOC=30°$．而线段 AC 与以上所作的圆都相切（在微分几何中，称 AC 为这族圆的包络）．

下面证明这的确是所求的边界．

显然$\overset{\frown}{DC}$上的每一点，质点都能到达．设 E 为 AC 上一点，过 E 作 AC 的垂线，交 x 轴于 B（图 68）．

设 $OB=2t$，则 $BA=2-2t$，而$\angle BAE=30°$，

$$BE=\frac{1}{2}BA=\frac{1}{2}(2-2t)=1-t.$$

因此质点从 O 沿 x 轴行 t 秒到 B，再沿 BE 行 $1-t$ 秒便达到 E. 从而 AC 上每一点，质点均能到达.

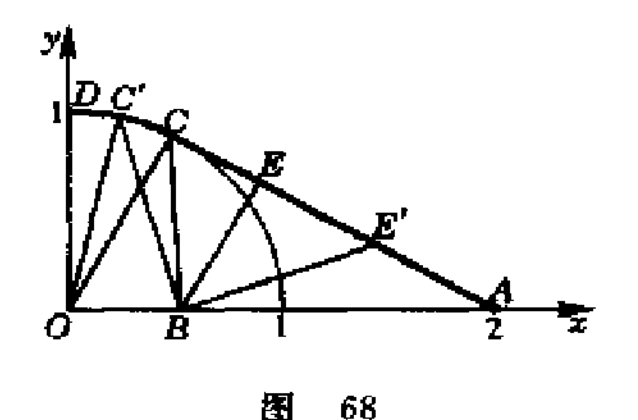


图 68

稍困难一点的是证明质点不能"溢出"上述边界.

仍用图 68. 质点沿 x 轴到 B 后，如果沿直线 BE' 前进. 设 BE' 交 AC 于 E'. 那么由于斜线大于垂线，

$$BE'>BE=1-t.$$

所以质点不能沿 BE' 溢出上述边界.

如果质点到 B 后，沿直线 BC' 前进. 设 BC' 交 $\overset{\frown}{DC}$ 于 C'，那么在 $\triangle C'OB$ 与 $\triangle COB$ 中，

$$C'O=CO=1,\ OB=OB,\ \angle C'OB>\angle COB,$$

所以

$$BC'>BC>BE=1-t,$$

因而质点也不会沿 BC' 溢出上述边界.

综上所述，$\overset{\frown}{DC}$ 与线段 CA 组成所求的边界.

40. 求角的值（一）

求角的值，也是常见的问题.

设 P 为 $\triangle ABC$ 内一点，$AB=BC$，$\angle ABC=80°$，$\angle PAC=40°$，$\angle ACP=30°$，求 $\angle BPC$.

本题的解并不容易．用三角当然可做，但我们更希望纯粹几何的解法（三角解法见本节后半部分）．而纯用几何，没有正确的想法，将会陷于窘境，达不到目的，做了半天，“犹隔蓬山一万重”．

首先应画一个正确的图．由于 $BA=BC$，这个三角形是以 AC 为底的等腰三角形，所以 B 应画在中间．

这样的图启发我们利用对称性．先作出对称轴，也就是高 BD．设 BD 交 CP 于 E，连接 AE（图 69）．

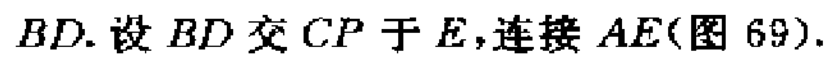


图 69

注意$\triangle ABE$．显然

$$\angle PEA=\angle ECA+\angle EAC=2\times 30^\circ=60^\circ,$$

$$\angle PEB=\angle CED=60^\circ,$$

所以 PE 平分$\angle AEB$．

又

$$\angle PAE=\angle PAC-\angle EAC=40^\circ-30^\circ=10^\circ,$$

$$\angle PAB=\angle CAB-\angle PAC=\frac{180^\circ-80^\circ}{2}-40^\circ=10^\circ,$$

所以 PA 平分$\angle EAB$．

因此 P 是$\triangle ABE$ 的内心（这是本题的关键），

$$\angle PBE=\frac{1}{2}\angle EBA=\frac{1}{2}\times 40^\circ=20^\circ,$$

从而

$$\angle BPC=180^\circ-\angle PEB-\angle PBE$$
$$=180^\circ-60^\circ-20^\circ=100^\circ.$$

不用对称性，当然也可以做，但不如上法简单．

三角的解法思路直接，但稍繁，优美性不及上面的几何解法. 我们将它附在下面：

设$\angle BPC=\alpha$，则

$$\angle BPA=360^\circ-\alpha-\angle CPA=250^\circ-\alpha,$$

由正弦定理

$$\frac{BC}{BP}=\frac{\sin\alpha}{\sin 20^\circ},\quad \frac{BA}{BP}=\frac{\sin(250^\circ-\alpha)}{\sin 10^\circ},$$

所以

$$\frac{\sin\alpha}{\sin 20^\circ}=\frac{\sin(250^\circ-\alpha)}{\sin 10^\circ}, \qquad ①$$

即

$$\frac{\sin(\alpha-70^\circ)}{\sin\alpha}=\frac{\sin 10^\circ}{\sin 20^\circ}, \qquad ②$$

从面

$$2\cos 10^\circ \sin(\alpha-70^\circ)=\sin\alpha. \qquad ③$$

由积化和差得

$$\sin(\alpha-60^\circ)+\sin(\alpha-80^\circ)=\sin\alpha, \qquad ④$$

移项（注意使下一步产生特殊角 30°的正弦）

$$\sin(\alpha-80^\circ)=\sin\alpha-\sin(\alpha-60^\circ),$$

由和差化积得

$$\sin(\alpha-80^\circ)=2\sin 30^\circ\cos(\alpha-30^\circ)=\cos(\alpha-30^\circ),$$

即

$$\sin(\alpha-80^\circ)=\sin(120^\circ-\alpha).$$

从而

$$\alpha-80^\circ=120^\circ-\alpha,$$

$$\alpha=100^\circ.$$

如果注意到 $\alpha=100°$是②的解，便可以由

$$\frac{\sin(\alpha-70°)}{\sin\alpha}=\cos70°-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\sin70°$$

是严格增函数（因为 $-\cot\alpha$ 严格增）立即得出 $\alpha=100°$是唯一解，不必再经过③，④等等去求解.

41. 求角的值（二）

$\triangle ABC$ 的角平分线 AB，BE 分别交 BC，CA 于 D，E，DE 平分$\angle ADC$，求$\angle A$.

本题的图，如果不知道结论，当然不易画得准确. 不过，可以先画一个草图帮助思考.

题目不算难，但我曾经在不少场合给不同的对象（教师、大学生、中学生）做过. 能够找到最简单的解答的人并不多.

仔细观察你的图，从各个角度去看. 特别是看一看$\triangle ABD$（而不是原来的$\triangle ABC$）. 那么就会发现$\triangle ABD$ 的一条内角平分线 BE 与一条外角平分线 DE 相交于 E. 所以 E 是这个三角形的旁心. 从而 AC 平分$\angle FAD$. 但 AD 又平分$\angle BAC$，所以$\angle BAD$ 是平角的$\frac{1}{3}$，$\angle BAC$ 是平角的$\frac{2}{3}$，即 120°（图 70）.

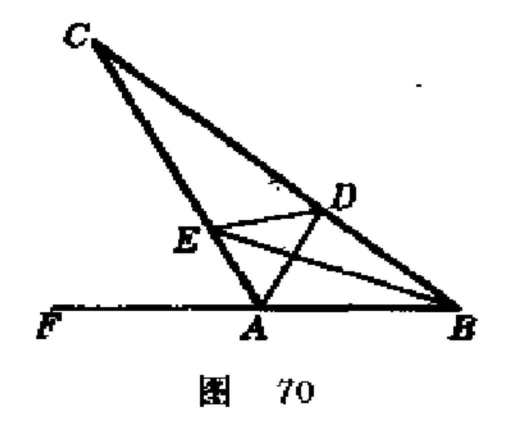


图 70

本题的关键只有一句话：E 是$\triangle ABD$ 的旁心. 在（一）中，我们曾用到三角形的内心，现在利用旁心，可谓“异曲同工”.

42. 求角的值(三)

在$\triangle ABC$中,$AB=BC$,$\angle ABC=80°$,P点在$\triangle ABC$内,并且$\angle PAC=10°$,$\angle PCB=20°$,求$\angle ABP$.

本题原是北京大学出版的《数学奥林匹克》初中版初二分册的一个习题.书上答案是70°,但如何推出却不得而知.1998年在四川彭州讲课,有位听课的老师问我怎样解.这套书虽然是我主编的,但这一册并不是我写的,即使是我写的,也不能保证每道题都能当场解出来,幸而这题与第40节相当类似,画同样的$\triangle ABC$,并作对称轴,很快就解出来了.谁知这次写书时却竟然忘记原来的解法,想了好一阵才得到一种解法,但它肯定不是原来的.我先将这次得到的解法写在下面:

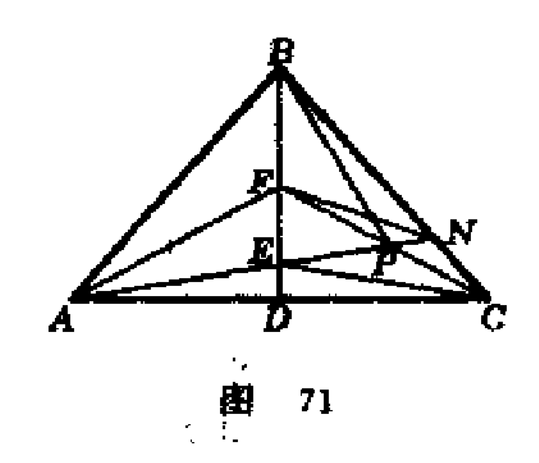


图 71

设AP交BD于E,交BC于N,CP交BD于F.连接AF(图71).

易知$\angle FAN=30°-10°=20°=\angle FCN$,所以$F,A,C,N$四点共圆;$\angle CFN=\angle CAP=10°$.

又$\angle CFD=90°-30°=60°$,$\angle ANB=50°+10°=60°$,所以P,F,B,N四点共圆,$\angle PBC=\angle CFN=10°$.

从而$\angle ABP=80°-10°=70°$.

上面的解法用了两次四点共圆,显然不是我原来的解法.原来的解法更简单些,但实在想不起来,幸而找到当年的日记,竟然有记录(应当养成习惯,将有趣的问题与解答都记录下来.否则事过境迁,再也想不起来).原来的解法如下:

辅助线如图 72，则

$\angle FPA = \angle PCA + \angle PAC$

$= 10° + (50° - 20°)$

$= 40° = \angle FBA$，

$\angle FAP = \angle FAC - \angle PAC$

$= \angle PCA - \angle PAC$

$= (50° - 20°) - 10° = 20°$，

$\angle FAB = 50° - 10° - 20° = 20° = \angle FAP$，

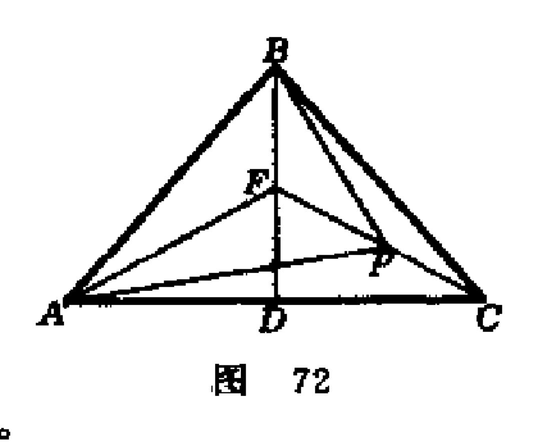


图 72

所以$\triangle FAP \cong \triangle FAB$，$FP = FB$．从而$\angle FBP = \angle FPB = 20° + \angle PBC$．结合$\angle FBP + \angle PBC = 40°$，即得$\angle FBP = 30°$，从而$\angle ABP = 70°$．

两次的解答不同（人的思维的确难以捉摸），前一个图多出点 N（与点 E），引向另一条路了．

43．求角的值（四）

求图 73 中的？是多少度．

这道题，可以用三角解，但我们更希望不用三角的解法．

注意$\triangle ABC$是等腰三角形（$\angle ABC = \angle ACB$），所以我们作高 AE（对称轴）．

接下去怎么办呢？

将$\triangle ABE$以 AB 为对称轴翻转得$\triangle ABE'$（图 74）．

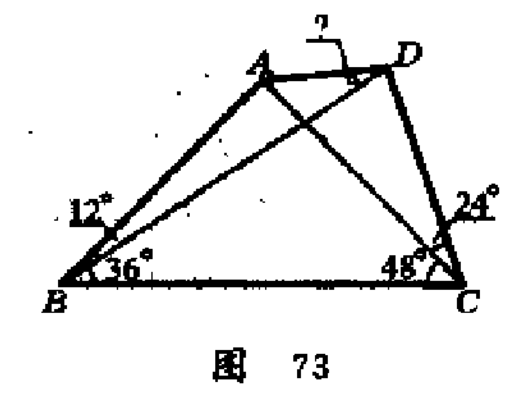


图 73

$$BE' = BE = \frac{1}{2}BC.$$

注意$\triangle BCD$也是等腰三角形（$\angle BCD = \angle BDC$），所以

$$BE' = \frac{1}{2}BD.$$

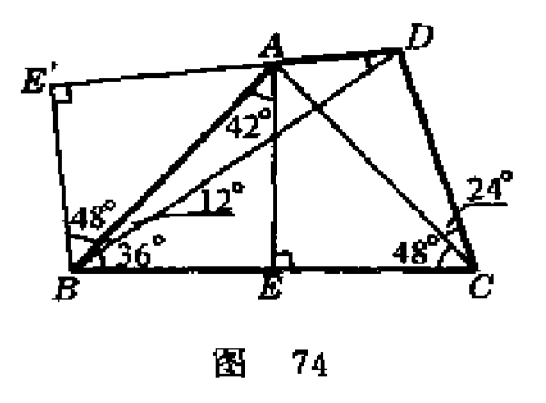


图 74

我们希望 D, A, E' 三点共线，这样就立即得出 $\angle ADB = 30°$. 但 D, A, E' 共线必须证明，不能直接利用（虽然它们的确共线）.

为了绕过这一障碍，我们自 D 向 BE' 作垂线，设垂足为 E''. 注意

$$\angle DBE'' = 48° + 12° = 60°,$$

所以

$$BE'' = \frac{1}{2}BD = BE',$$

从而 E'' 与 E' 重合. D 在过 E' 的 BE' 的垂线 $E'A$ 上，即 D, A, E' 三点共线.

三角证法如下：

设 $BC = 1$，则 $AB = \frac{1}{2\cos 48°}$.

设所求的角为 α，则在 $\triangle ABD$ 中，由正弦定理

$$\frac{1}{2\cos 48°} = \frac{\sin\alpha}{\sin(180° - 12° - \alpha)}, \quad ①$$

从而

$$2\cos 48°\sin\alpha = \sin(168° - \alpha).$$

积化和差得

$$\begin{aligned}\sin(\alpha + 48°) &= \sin(168° - \alpha) - \sin(\alpha - 48°)\\ &= 2\cos 60°\sin(108° - \alpha)\\ &= \sin(108° - \alpha),\end{aligned}$$

于是

$$\alpha+48°=108°-\alpha,$$

$$\alpha=30°.$$

上面将 $\sin(\alpha-48°)$ 移项是为了得出特殊角的三角函数值 $\cos60°$.

也可由①的右边是 α 的严格递增函数(它的倒数 $\frac{\sin(168°-\alpha)}{\sin\alpha}=(\sin168°)\cot\alpha-\cos168°$ 严格递减),立即得出①只有一个解.而不难验证 30°是它的解,所以 $\alpha=30°$.

44. 一道习题的编制

1978 年,我在中国科学技术大学拟少年班试题.我们希望推陈出新,从老题目中翻出些新花样来.为此考虑一个三棱锥 $A-BCD$,沿侧棱 AB,AC,AD 剪开并铺平(在 16 节里我们也是这样做的).如果棱锥的高是 AM,那么 A_1M 与 BC 垂直相交于 M_1,并且 A_1M_1 在原来的棱锥中是 BC 边上的斜高.同样,$MA_2\perp CD$,$MA_3\perp BD$.这样,我们就可以编出一条问题:

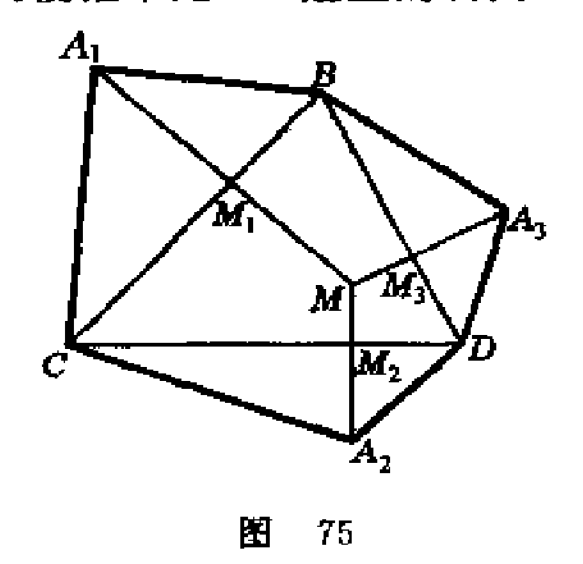


图 75

如图 75,$A_1B=BA_3$,$A_1C=CA_2$,$A_2D=DA_3$,自 A_1、A_2、A_3 分别作 BC,CD,DB 的垂线,求证三条垂线共点.

或等价地,

自点 M 向$\triangle BCD$ 的三边作垂线,并且在垂线上分别取 A_1,A_2,A_3,如果 $A_1B=BA_3$,$A_1C=CA_2$,求证 $A_2D=DA_3$.

问题编出来了,对不对呢?怎样证呢?

如果能把图 75 重新折起来还原成三棱锥，问题就解决了. 但三棱锥同一个顶角处的两个面角之和大于第三个面角，如果$\angle A_1BC$，$\angle A_3BD$都很小，那就不可能将图 75 折成一个三棱锥. 所以还得另找办法.

这里有很多垂线，很自然地想到勾股定理. 不难得到

$$\begin{aligned}DA_2^2 - DM^2 &= CA_2^2 - MC^2\\ &= CA_1^2 - MC^2 = BA_1^2 - MB^2\\ &= BA_3^2 - MB^2 = A_3D^2 - MD^2,\end{aligned}$$

因此，

$$DA_2 = A_3D.$$

这样问题就解决了. 更进一步，可以把已知的等式$A_1B = BA_3$，$CA_1 = CA_2$改为不等式$A_1B \geqslant BA_3$，$CA_1 \leqslant CA_2$，结论改为$DA_2 \geqslant A_3D$，证明仍然适用.

这里的三角形还可以改成 n 边形.

45. 相切的圆串

如图76，$\odot C_0$，$\odot C_1$半径均为1，互相外切并且均与直线l相切. 作$\odot C_2$与$\odot C_0$，$\odot C_1$外切并且与l相切；作$\odot C_3$与$\odot C_0$，$\odot C_2$外切，并且与l相切；……；作$\odot C_n$与$\odot C_0$，$\odot C_{n-1}$外切并且与l相切. 求$\odot C_n$的半径r_n.

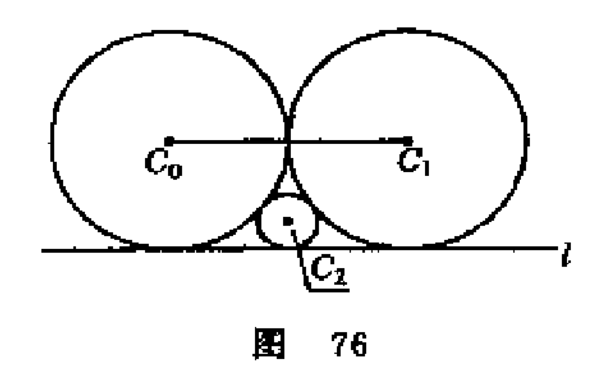


图 76

我们首先考虑图 77，设两圆外切半径为r，r'，第三个圆与前两个圆外切，半径为x，这三个圆又都与直线l相切，那

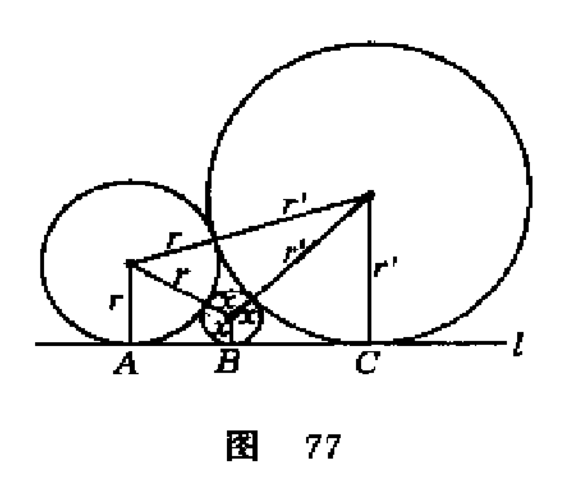


图 77

么这时有

$$AB=\sqrt{(r+x)^2-(r-x)^2}=2\sqrt{rx},$$

$$BC=2\sqrt{r'x},$$

$$AC=2\sqrt{rr'}.$$

于是

$$\sqrt{rx}+\sqrt{r'x}=\sqrt{rr'},$$

即

$$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{r}}+\frac{1}{\sqrt{r'}}. \qquad ①$$

这样，在开始所说的问题中，

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}+1. \qquad ②$$

由于 $r_1=1$，可逐步算出 $r_2=\frac{1}{4}$，……假定已有 $r_{n-1}=\frac{1}{(n-1)^2}$，那么由②立即得到 $r_n=\frac{1}{n^2}$. 根据归纳法，$r_n=\frac{1}{n^2}$.

如果在前面的图 70 中，$\odot C_3$ 与 $\odot C_1$，$\odot C_2$ 外切；$\odot C_4$ 与 $\odot C_2$，$\odot C_3$ 外切；……；$\odot C_n$ 与 $\odot C_{n-1}$，$\odot C_{n-2}$ 外切；……这些圆都与 l 相切，这时①式成为

$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}=\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{r_{n-2}}}. \qquad ③$$

于是

$$r_n=\frac{1}{F_n^2}, \qquad ④$$

其中 F_n 满足

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2}. \qquad ⑤$$

并且 $F_0=1, F_1=1, F_2=2, \cdots\left(r_0=1, r_1=1, r_2=\frac{1}{4}, \cdots\right)$.

⑤是著名的斐波那契数列，它的通项公式为

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right),$$

于是这时

$$r_n=\frac{5}{\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)^2}.$$

46. 阿基米德的一个定理

大科学家阿基米德对几何有很多研究. 下面就是他发现的一个定理：

设$\triangle ABC$的外接圆的弧$\overset{\frown}{ACB}$的中点为M. 自M向AC,CB中较长的一条引垂线，设垂足为D，则D平分折线$AC+CB$的长.

设$AC>CB$，要证

$$AD=DC+CB. \qquad ①$$

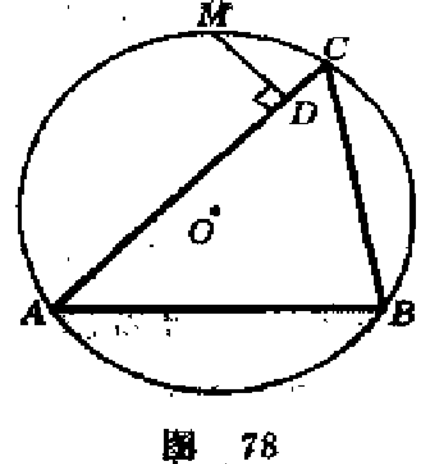


图 78

以 M 为圆心，MA 为半径作圆，交 AC 的延长线于 N，则

$$\angle ANB=\frac{1}{2}\angle AMB=\frac{1}{2}\angle ACB.$$

于是$\angle CBN=\angle ACB-\angle ANB=\angle ANB$，从而

$$DN=DC+CN=DC+CB.$$

由于 MD 是 AN 的弦心距，所以

$$AD=DN=DC+CB.$$

进一步还有下面的结论：

在图 79 中，如果 C' 是 AB 的中点，那么 $C'D$ 称为$\triangle ABC$ 的周长平分线。类似地，可以定义另两条周长平分线。则这三条周长平分线交于一点。

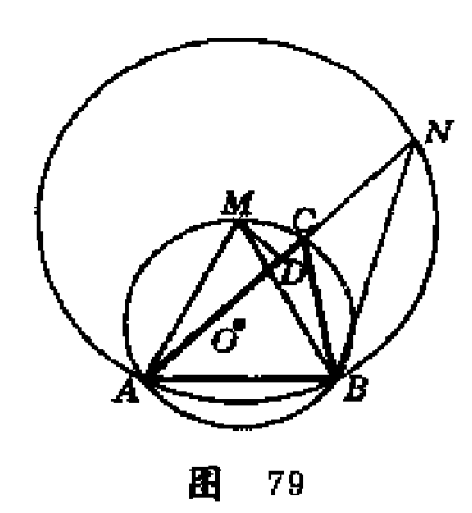


图 79

证明如下：

在图 79 中，$C'D$ 是$\triangle ABN$ 的中位线，因而 $C'D \parallel BN$。由于 $\angle ANB=\frac{1}{2}\angle ACB$，所以 $C'D$ 与$\angle ACB$ 的平分线平行。

$\triangle ABC$ 的三个中点所成的三角形 $A'B'C'$ 中，$C'D$ 是$\angle A'C'B'$的平分线。其他两条$\triangle ABC$ 的周长平分线也是$\triangle A'B'C'$的角平分线。因此这三条周长平分线交于一点。

47. 平 分 周 长

在第 46 节，已经介绍过平分周长的直线。下面一道 1999 年国际城市竞赛题恰好与此有关。

如图 80，设 K，L 分别为$\triangle ABC$ 的两个旁切圆在边 AC，CB 上的切点。连结 AB 的中点与 KL 的中点。证明这条直线：

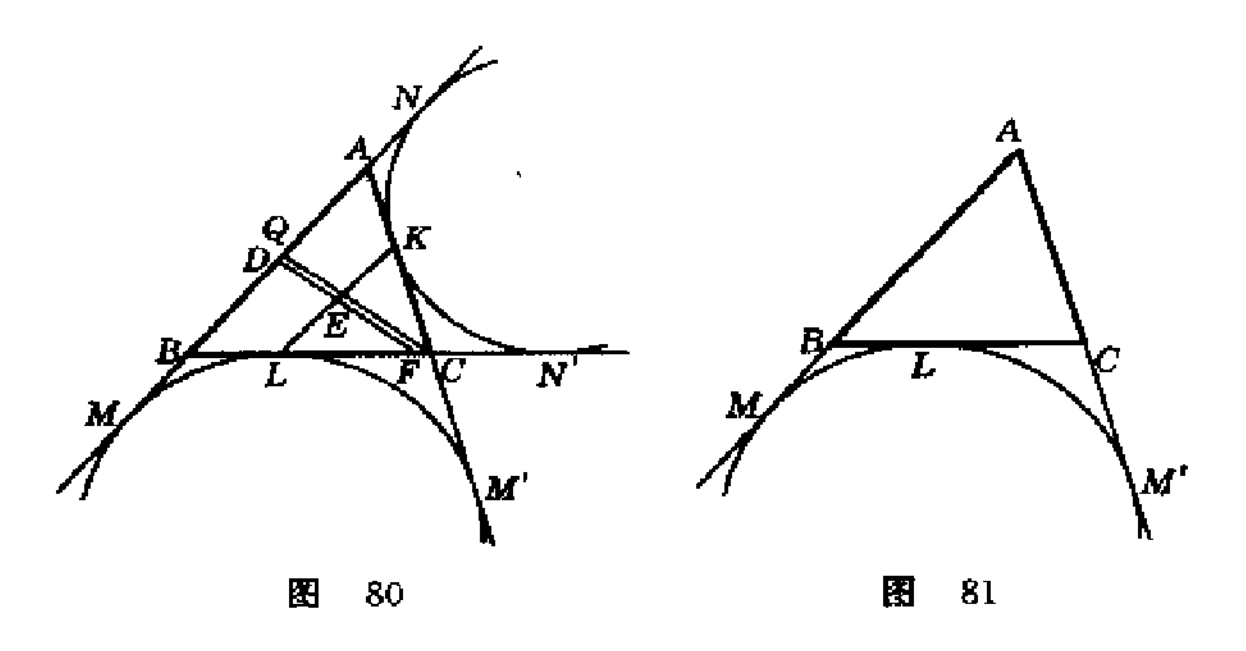


图 80　　　　图 81

(a) 将$\triangle ABC$的周长分为两半；

(b) 平行于$\angle ACB$的平分线.

设AB,KL中点分别为D,E,直接证明DE满足(a),(b)不易措手.我们设F点在BC上并且与D平分$\triangle ABC$的周长.转而证明D,E,F共线,而且这条直线平行于$\angle ACB$的平分线CQ.

由第46节,我们已经知道$DF /\!/ CQ$.因此只需证明$EF /\!/ CQ$.

设直线AB与所说两个旁切圆的切点为M,N.直线AC与BC边的旁切圆相切于M'(图81).易知

$$AB+BL=AM=AM'=AC+CL,$$

所以

$$AM=AM'=\frac{AB+AC+BC}{2}=s,$$

$$BL=s-AB.$$

同理

$$AK=BN-AB=s-AB.$$

于是 $BL=AK$，而且

$$LF=FC+CK. \quad ①$$

对于$\triangle CKL$，EF 是平分周长的直线并且 E 是边 KL 的中点. 于是，由上节阿基米德的定理，$EF /\!/ CQ$. 从而结论成立.

从上而的证明还看出 D 到两个旁切圆的切线相等，①又表明 F 到这两个旁切圆的切线相等. 从而 D，F 都在这两个圆的根轴上. 换句话说，平分周长的直线 DF 就是两个旁切圆的根轴.

48. 学校选址（一）

如图 82，A，B，C 三点分别表示三个村庄. 准备联合办一所学校，如果三个村庄上学人数的比是 3∶2∶1，那么学校应设在哪里才能使学生所走路程的和最少？即求一点 P，使得

$$3\cdot PA+2\cdot PB+1\cdot PC \quad ①$$

最小.

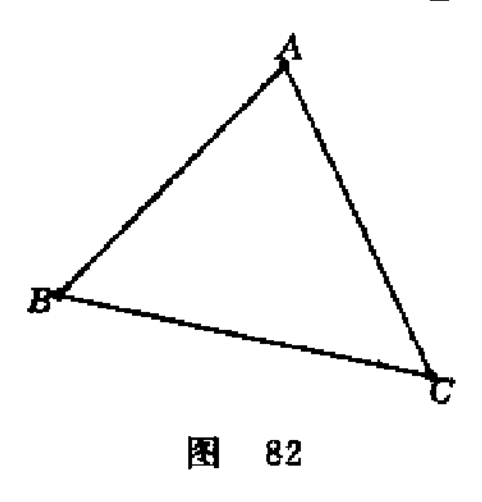


图 82

本题是日本的小学算数竞赛的试题. 算数竞赛由日本读卖新闻社与算数竞赛委员会主办. 委员会的会长是著名数学家、菲尔兹奖获得看广中平佑（日本已有 3 名数学家获得过菲尔兹奖，他们是小平邦彦、广中平佑、森重文）. 广中平佑写过一本自传《奇点的消解》，很受读者欢迎.

图 83 是日本第一届算数竞赛表彰仪式，中座者是广中平佑. 图 84 是广中平佑在第二届算数竞赛开幕式上致词.



图 83



图 84

现在回到学校选址的问题.

答案是学校应选在 A 点. 因为对任一点 P,都有

$$
\begin{aligned}
&3\cdot PA+2\cdot PB+1\cdot PC\\
&\quad=2(PA+PB)+(PA+PC)\\
&\quad\geqslant 2AB+AC.
\end{aligned}
$$

而且最后的等号仅在 P 与 A 重合时成立.

本题只利用了最基本的几何不等式：

三角形两边之和大于第三边.

关键之处是注意

$$3=2+1.$$

如果没有这样的等式成立，问题就复杂得多(请看下一节). 但是，我们千万不要把简单的问题复杂化，做小学问题不要搬出许多定理、公式，就像一个小小的民事纠纷，不必出动坦克、飞机一样. 解题时，想得过分复杂也是不好的.

49. 学校选址(二)

更一般地，设村庄 A，B，C 分别有 p，q，r 个学生，学校应设在何处，才能使学生上学所走的总路程为最小？

设学校在 P 点，问题即求

$$p\times PA+q\times PB+r\times PC \quad ①$$

的最小值.

这就是一般的斯坦纳(Steiner)问题. 当 $p=q=r$ 时，答案是等角中心(即满足 $\angle APB=\angle BPC=\angle CPA=120^\circ$ 的点 P，也称为费马点)或 $\triangle ABC$ 的顶点(当 $\angle A\geqslant 120^\circ$ 时，P 就是点 A).

设 $p\geqslant q\geqslant r$. 如果 $p\geqslant q+r$，那么与上节相同，答案为 A 点. 设 $p<q+r$. 这时 p，q，r 组成三角形. 设这个三角形的角为 α，β，γ.

如果 $A<180^\circ-\alpha$，$B<180^\circ-\beta$，$C<180^\circ-\gamma$，那么在 $\triangle ABC$ 内存在一点 P，满足

$$\angle BPC=180^\circ-\alpha,\angle CPA=180^\circ-\beta,\angle APB=180^\circ-\gamma$$

(以 BC 为底，在 A 的同侧作含角为 $180^\circ-\alpha$ 的弓形弧. 又以

CA 为底，在 B 的同侧作含角为 $180°-\beta$ 的弓形弧．两个弓形弧的交点即是满足上式的 P）．

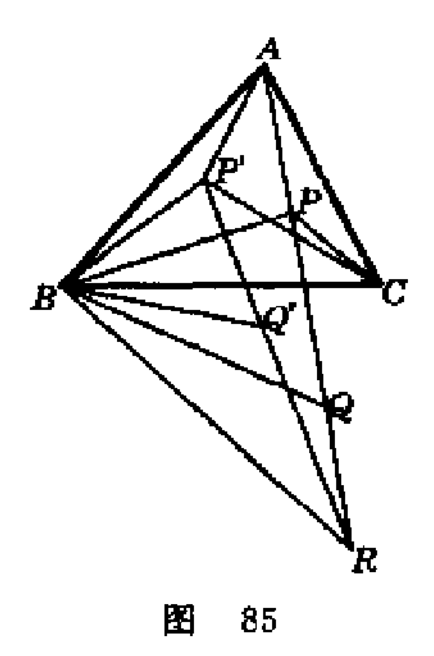


图 85

我们证明这个 P 使①达到最小．

如图 85，在 AP 延长线上取 Q，使

$$PQ=\frac{q}{p}\times PB.$$

再取 R，使

$$QR=\frac{r}{p}\times PC.$$

则

$$\begin{aligned}
&p\times PA+q\times PB+r\times PC\\
&=p\times\left(PA+\frac{q}{p}\times PB+\frac{r}{p}\times PC\right)\\
&=p\times AR.
\end{aligned}$$

而对任一点 P'，以 BP' 为一边作角为 α,β,γ 的三角形 $BP'Q'$，则

$$P'Q'=\frac{q}{p}\times P'B,$$

$$BQ'=\frac{r}{p}\times P'B.$$

由于$\triangle BPQ$ 也与角为 α,β,γ 的三角形相似，所以$\angle BQR=180°-\alpha=\angle BPC$，$\triangle BPC$ 与$\triangle BQR$ 相似．从而不难推出 $\triangle BP'C\backsim\triangle BQ'R$，$Q'R=\frac{r}{p}\times P'C$．于是

$$\begin{aligned}
&p\times P'A+q\times P'B+r\times q'C\\
&=p\times(P'A+P'Q'+Q'R)\\
&\geqslant p\times AR
\end{aligned}$$

$$= p \times PA + q \times PB + r \times PC.$$

这就证明了所作的 P 使①达到最小.

如果 $A<180°-\alpha, B<180°-\beta, C<180°-\gamma$ 不全成立，那么不妨设 $B \geqslant 180°-\beta$(这时另两个不等式均成立).

我们证明 B 使①为最小，即

$$p \times PA + q \times PB + r \times PC$$
$$= p \times BA + r \times BC$$

为最小.

如图 86，作 $\angle CBR=\beta$，并取 R，使 $BR=\frac{r}{p}BC$，则

$$p \times BA + r \times BC$$
$$= p \times (BA + BR).$$

对 $\triangle ABC$ 内一点 P'，作 $\triangle BP'Q'$，使 $\angle P'BQ'=\beta$，$BP':BQ'=p:r$(即 $\angle BP'Q'=\gamma$，$\angle BQ'P'=\alpha$). 易知 $\triangle BRQ' \backsim \triangle BCP'$，$RQ'=\frac{r}{p}P'C$. 所以

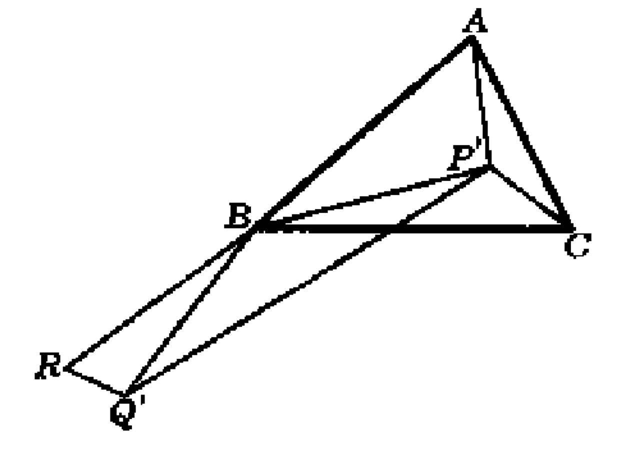


图 86

$$p \times P'A + q \times P'B + r \times P'C$$
$$= p \times (P'A + P'Q' + Q'R).$$

$$\text{折线 } P'A + P'Q' + Q'R > \text{折线 } AB + BR,$$

所以

$$p \times P'A + q \times P'B + r \times P'C > p \times BA + r \times BC.$$

当 P' 在其他位置时，利用外围的折线长大于里面的凸折线的长(可能用到 $P'A+P'Q'+Q'R>AQ'+Q'R$，其中 Q' 的意义同上)，同样可证 $BA+BR$ 比较小. 于是 B 使①为最小.

50. 黄蓉分饼(一)

黄蓉带了6个小孩到桃花岛旅游.

中午取出一块三角形的饼分给大家吃. 其中有一个叫杨过的孩子特别挑剔,希望他分到的一块不多不少,恰好是整个饼的$\frac{1}{7}$.

黄蓉拿起刀来,连劈三刀将饼分成7块:

"杨过,你拿中间的一块,它刚好是$\frac{1}{7}$."

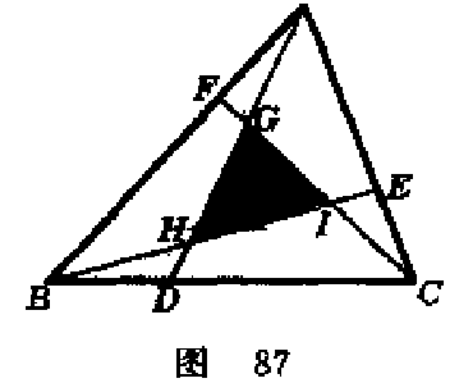


图 87

请问: 黄蓉是怎么分的?

取D、E、F为三边的点,并且$BD=\frac{1}{3}BC$、$CE=\frac{1}{3}CA$、$AF=\frac{1}{3}AB$.

根据第17节所说,$\frac{AG}{GD}=\frac{3}{4}$,所以,

$$S_{\triangle AGC}=\frac{3}{3+4}S_{\triangle ACD}=\frac{3}{7}\times\frac{2}{3}S_{\triangle ABC}$$
$$=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}.$$

同理

$$S_{\triangle ABH}=S_{\triangle BCI}=\frac{2}{7}S_{\triangle ABC}.$$

因此

$$S_{\triangle GHI}=\left(1-3\times\frac{2}{7}\right)S_{\triangle ABC}=\frac{1}{7}S_{\triangle ABC}.$$

51. 黄蓉分饼（二）

这次黄蓉带了 8 个小孩和一块四边形的饼．要将饼分成 9 块，中间一块恰好是（整个饼的）$\frac{1}{9}$．

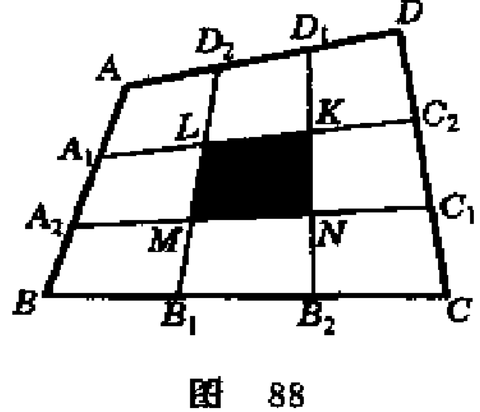


图 88

请问黄蓉是怎么切的？她怎么能保证中间一块恰好是$\frac{1}{9}$？

设四边形 $ABCD$ 是饼．将每边都三等分，然后连结对边的相应分点得四条直线（横两刀竖两刀）．可以证明中间一块恰好是$\frac{1}{9}$．

事实上，

$$S_{\triangle BCA_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle BCA},$$

$$S_{\triangle ADC_2}=\frac{1}{3}S_{\triangle ACD},$$

所以

$$S_{\triangle BCA_2}+S_{\triangle ADC_2}=\frac{1}{3}(S_{\triangle BCA}+S_{\triangle ACD})=\frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

而 $S_{\triangle A_2C_2A_1}=S_{\triangle A_1C_2A}$，$S_{\triangle C_2A_2C_1}=S_{\triangle C_1A_2C}$，

所以

$$S_{A_1A_2C_1C_2}=S_{\triangle A_2C_2A_1}+S_{\triangle C_2A_2C_1}$$

$$=\frac{1}{2}S_{AC_2C_1B}=\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)S_{ABCD}$$

$$=\frac{1}{3}S_{ABCD}.$$

如果能够证明 L,K 为 A_1C_2 的三分点，M,N 为 A_2C_1 的三分点，那么就有

$$S_{\triangle MNK}=\frac{1}{3}S_{A_1A_2C_1C_2}=\frac{1}{9}S_{ABCD}.$$

注意 $A_1D_2 /\!/ BD /\!/ B_1C_2$，便有

$$\frac{A_1L}{LC_2}=\frac{A_1D_2}{B_1C_2}=\frac{A_1D_2}{BD}\times\frac{BD}{B_1C_2}$$

$$=\frac{1}{3}\times\frac{3}{2}=\frac{1}{2},$$

即

$$\frac{A_1L}{A_1C_2}=\frac{1}{3}.$$

同理(可以用 $A_2B_1 /\!/ AC /\!/ D_1C_2$)

$$\frac{KC_2}{A_1C_2}=\frac{1}{3},\quad \frac{A_2M}{A_2C_1}=\frac{NC_1}{A_2C_1}=\frac{1}{3}.$$

于是结论成立.

更一般地，如果将每边等分为 $2n+1$ 份，连接对边相应的分点，那么中间一块是整个四边形的$\frac{1}{(2n+1)^2}$.

52. 垂　心?

如果 P 是垂心，即高 AD,BE,CF 的交点，那么易证 $\triangle AEF,\triangle BFD,\triangle CDE$ 的外接圆交于一点(图 89)，而且

$$\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE},\quad \frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF},\quad \frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD}.$$

反过来，P 是否是垂心? 即

点D，E，F分别是三角形ABC的边BC，CA，AB上的点，$\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$的外接圆交于一点P，而且

$$\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE},\quad \frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF},$$

$$\frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD},$$

是否有AD，BE，CF是三角形ABC的三条高，即P是垂心？

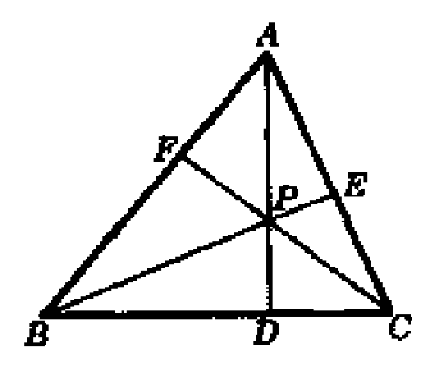


图 89

本题看似容易，却不易下手. 特别要注意不可假定AD，BE，CF都过点P.

$\triangle AEF$，$\triangle BFD$，$\triangle CDE$的外接圆交于一点P，这一条件没有多大用处. 实际上，不论D，E，F在三边上的位置如何，相应的三个圆都交于一点，这就是著名的密克(Miquel)定理. 当然，从四点共圆可以推出

$$\angle BFP=\angle AEB \qquad ①$$

等等. 但①只能导出

$$\angle BFP=180^\circ-\angle PEC, \qquad ②$$

而不能导出

$$\angle BFP=\angle PEC. \qquad ③$$

相等的比

$$\frac{PD}{PE}=\frac{BD}{AE},\quad \frac{PE}{PF}=\frac{CE}{BF},\quad \frac{PF}{PD}=\frac{AF}{CD} \qquad ④$$

是至关紧要的条件. 我们希望利用它们能得到相似三角形. 然而只有②，没有③，所以得不出

$$\triangle BPF\backsim\triangle CPE. \qquad ⑤$$

要得出相似三角形，只有延长PF到C'，使

$$FC'=PF. \qquad ⑥$$

这样，由$\frac{FC'}{EP}=\frac{BF}{CE}$及$\angle C'FB=\angle PEC$可得

$$\triangle C'FB \backsim \triangle PEC, \qquad ⑦$$

从而

$$\angle BC'F=\angle CPE.$$

同理

$$\angle AC'F=\angle CPD.$$

以上两式相加得

$$\angle BC'A=\angle DPE$$
$$=180^\circ-\angle ACB.$$

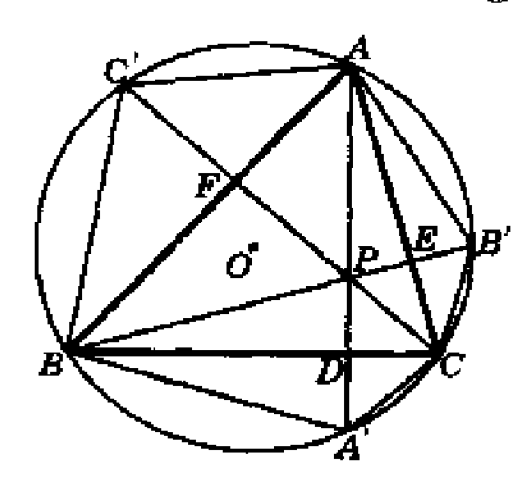


图 90

于是点C'在$\triangle ABC$的外接圆上. 这一点在我们意料之中，因为如果CF是高，延长它与外接圆相交于C'，那么$FC'=PF$（第 24 节）.

由于⑦，

$$\angle C'BF=\angle PCE,$$

而由同弧上的圆周角相等有

$$\angle C'BF=\angle C'CA.$$

比较以上两式即得C,P,C'共线，从而C,P,F,C'在一条直线上.

同理，可证B,P,E共线. 于是

$$\angle BPF=\angle CPE=\angle BC'F,$$

从而$\triangle BPC'$是等腰三角形，底边PC'的中线$BF\perp PF$，即CF是$\triangle ABC$的高.

同理，AD，BE也是$\triangle ABC$的高.

本题是 1999 年～2000 年波兰数学奥林匹克的试题. 最后通过外接圆来解决问题. 解题之初可能未曾料到，但如果熟

悉第 24 节中的结论，并发现 C' 在外接圆上，这就离问题的最终解决没有多远了.

53. 寻找简单的证明

已知四边形 $ABCD$ 为等腰梯形，使得 $AB/\!/CD$. 三角形 BCD 的内切圆切 CD 于 E，点 F 是 $\angle DAC$ 的内角平分线上一点，使得 $EF\perp CD$. $\triangle ACF$ 的外接圆交 CD 于点 C 和点 G. 证明：$\triangle AFG$ 为等腰三角形.

几何问题通常总要画一个草图帮助思考. 本题最好较为认真地画一个图. 因为要证 $\triangle AFG$ 为等腰三角形，但究竟哪两条边应当相等，我们并不知道，也许是 $AF=GF$，也许是 $AF=AG$ 或 $AG=GF$. 从草图上，大致能看出是 $AF=GF$，但不能肯定.（或许是图形不准确造成的？）作一个准确的图，就可以断定应当证明

$$AF=GF. \quad ①$$

这样，目的业已明确，不致射错了靶子.

在 $\odot O$（$\triangle ACF$ 的外接圆）内，弦 FG 对 $\angle FCD$，弦 FA 对 $\angle FCA$. $FG=FA$ 的充要条件是 $\angle FCD=180^\circ-\angle FCA$.

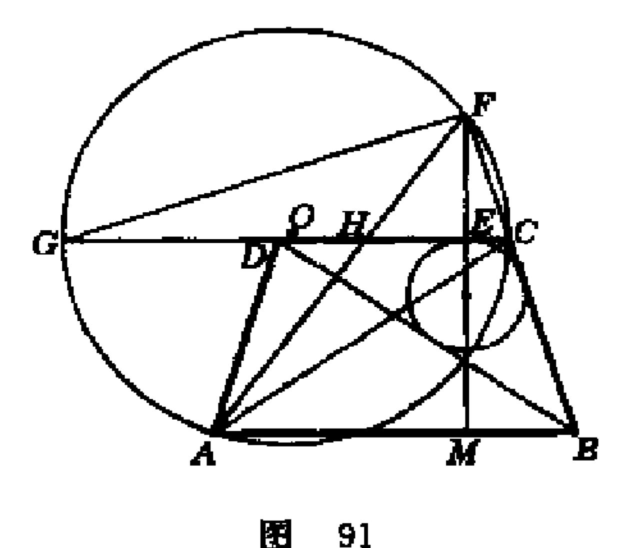


图 91

请注意图 91 中，F，C，B 并不在一条直线上. 如果这三点共线，那么 $\angle FCD=\angle CBA$. 而 $180^\circ-\angle FCA=\angle ACB$. 但 $\angle CBA=\angle ACB$ 只在 $AB=AC$ 时成立. 对一般的

等腰梯形，$AB\neq AC$，所以 F,C,B 不共线（图 91 中似乎共线，切莫受图的误导）.

如果使用三角，那么可设 $AB=a,CD=b,BC=c,AC=d$，梯形的高为 h，易知

$$h^2=d^2-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

并且

$$d^2-c^2=ab.$$

而要证明的等式即

$$2\angle FCD=180^\circ-\angle ACD. \qquad ②$$

因为
$$\tan\angle ACD=\frac{2h}{a+b},$$

$$\tan2\angle FCD=\frac{2\tan\angle FCD}{1-\tan^2\angle FCD},$$

$$\tan\angle FCD=\frac{FE}{CE},$$

$$CE=\frac{b+c-d}{2},$$

$$\frac{FE}{FE+h}=\frac{HE}{AM},$$

其中 H 是 AF 与 CD 的交点，M 是 EF 与 AB 的交点. 易知 $DH=\frac{bc}{c+d}$，AM,DE,HE 均可求出. 从而可通过计算证明②式. 但这样的计算相当麻烦，而且十分无趣. 最好是有一个纯粹几何的证明.

图形虽然比较复杂，几何证明却很简单（当然找到它也未必简单）：

②即证明 FC 平分$\angle ACD$ 的邻补角. 换句话说要证 F 是$\triangle ACD$ 的旁心.（又是旁心！）如果将 AC 延长，这一点就十分

清楚了.

$\triangle ACD$的旁心(与A相对的旁心)在$\angle CAD$的平分线AF上;而且旁切圆与CD的切点到C的长应当是$\frac{b+c-d}{2}$($b=CD, c=BC, d=AC$),即CE,因此E就是旁切圆与CD的切点,从而旁心也在CD的垂线EF上,于是旁心必定是F点,从而②,①成立.

一道看上去很复杂的问题(本题是1999年美国数学奥林匹克第6题),几何解法却意外的简单.

（五）学海无涯

54. 加法定理

这一章的内容多半与三角有关.

如果 α,β 都是锐角，那么以下三角公式成立：

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta. \quad ①$$

通常称之为加法定理.

我们可以给加法定理一个几何证明.

如图 92，A,B,C,D 是圆上顺次四点，BD 是直径，$\angle ABD=\alpha$，$\angle DBC=\beta$. 不妨设 $BD=1$. 由三角函数的定义，

$AD=\sin\alpha$，$AB=\cos\alpha$，

$BC=\cos\beta$，$CD=\sin\beta$.

又由正弦定理

$AC=\sin(\alpha+\beta)$.

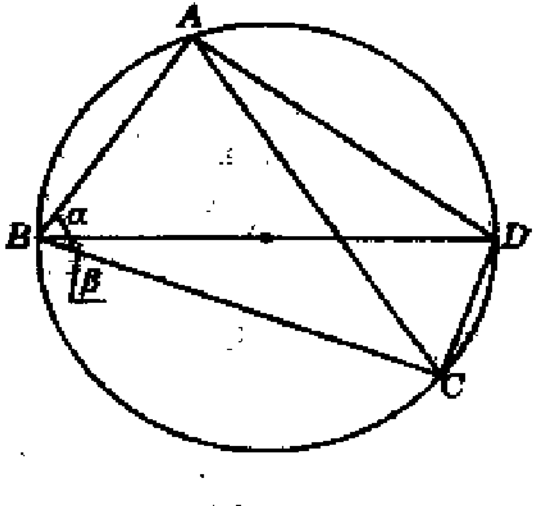


图 92

如果

$$AC\times BD=AB\times CD+BC\times AD, \quad ②$$

将 AC，BD，AD，AB，BC，CD 的值（表达式）代入上式即得①.

为了证明②，在 BA，BC 上分别取 C'，A'，使 $BA'=BA$，$BC'=BC$，连接 $A'C'$（图 93）. 易知 $\triangle BA'C'\cong\triangle BAC$，所以 $\angle BC'A'=\angle BCA=\angle BDA$. 从而 $C'A'$ 与 BD 垂直. 所以

$$
\begin{aligned}
BD\times AC &= BD\times A'C' = 2S_{BA'DC}\\
&= 2S_{\triangle BA'D}+2S_{\triangle BDC}\\
&= BA'\times CD+AD\times BC'\\
&= AB\times CD+AD\times BC,
\end{aligned}
$$

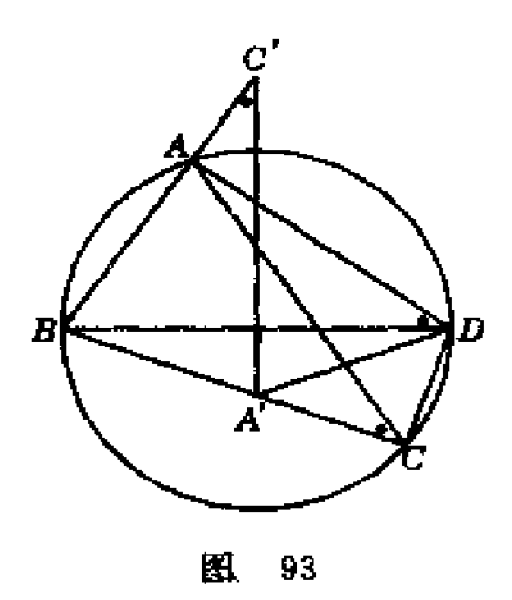


图 93

即②成立.

更一般地,有托勒密(Ptolemy)定理:

对圆内接四边形 $ABCD$,②式成立.

托勒密定理的证明不很困难,在很多书中都能找到(例如前面说过的《近代欧氏几何学》).

55. 余　　弦

我有一位姓余的朋友,是中国科学技术大学数学系的教授.他的女儿十分聪明可爱,余教授便给她起了个大名:余弦.又起了个小名:珂赛茜.这比《悲惨世界》中女主角的名字珂赛特好听得多.

在半径为1的圆(单位圆)中,如果弧的含角为 2α,那么弧所对的弦,弦心距恰好是 α 的余弦,即 $\cos\alpha$.

推导很容易,这里就不写了.不过,应当注意,当 α 是锐角时,圆心 O 与弧分居在弦 BC 的两侧,OD 是一条正的线段(图94);而当 α 是钝角时,圆心 O 与 $\overset{\frown}{BnC}$ 在弦 BC 的同侧,OD 是一条负的线段(图95).如果认为 OD 永远为正,那么 $OD=\cos\alpha$ 应修正为 $OD=|\cos\alpha|$.

设 $\triangle ABC$ 内接于单位圆.这时 $\overset{\frown}{BC}$ 所含的角是 $2\angle A$,所以圆心 O 到 BC 的距离

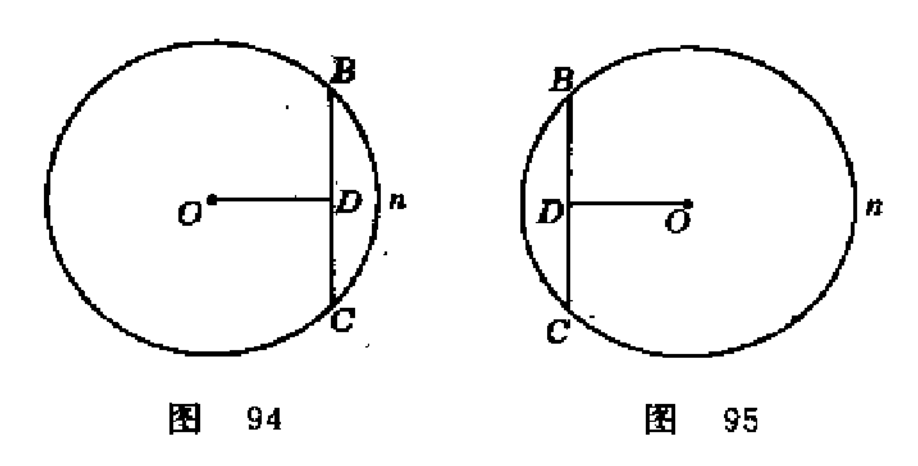


图 94　　　　图 95

$$OD=\cos A.$$

同理，在图 96 中，

$$OE=\cos B,\ OF=\cos C.$$

这里约定 O，A 在 BC 同侧时，OD 为正；O，A 在 BC 异侧时，OD 为负．OE，OF 的正负规定与此类似．

有了本节余弦的几何解释，我们便可做下一节的问题了．

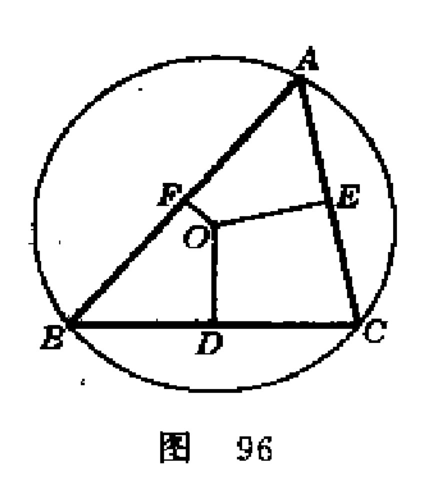


图 96

56. 角平分线与外接圆

与三角形的角平分线有关的几何证明题，往往与三角形的外接圆有关．如图 97，延长 $\triangle ABC$ 的角平分线 AD 与外接圆相交于 M，则 M 是 $\overset{\frown}{BC}$ 的中点，$MB=MC$．外接圆圆心 O 与 M 的连线垂直平分 BC．正是因为有这么多的性质可以利用，所以我们常常作出一些辅助线，构成图 97．

例如 1998 年全国高中联赛第二试第一题：

在 $\triangle ABC$ 中，$AB\neq AC$（原题无此条件，不妥），高 AN 的垂足 N，内心 I，外心 O 共线．证明与 A 相对的旁切圆的半径 $r_a=$ 外接圆半径 R．

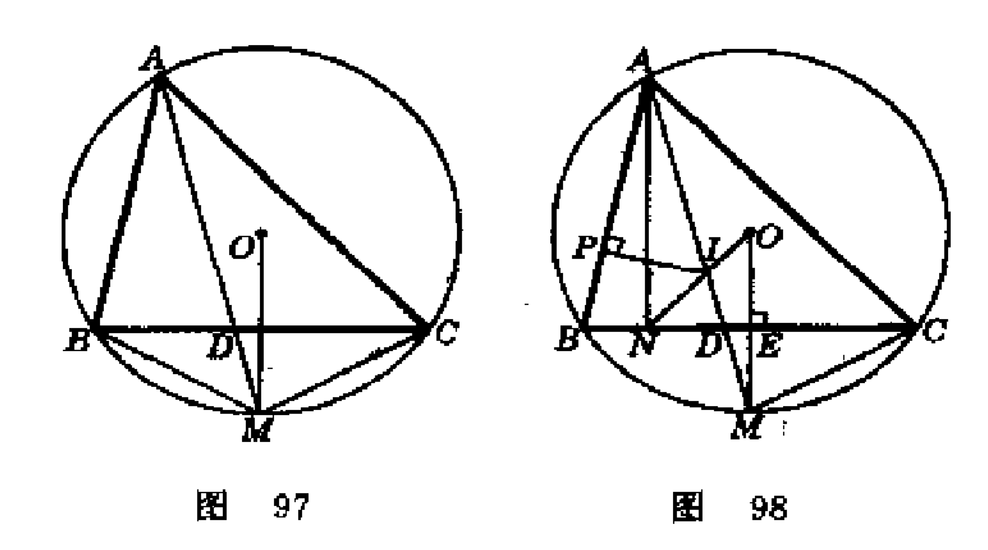


图 97　　　　图 98

设直线 AI（角平分线）交外接圆于 M，OM 交 BC 于 E. 设内切圆与 AB 相切于 P. 又设三角形的三条边分别为 a，b，c，$S=\frac{a+b+c}{2}$，高 $AN=h_a$.

本题由四个小题组成：

(1) $r_a=\frac{h_a a}{b+c-a}$；

(2) $\frac{OM}{NA}=\frac{MI}{AI}$ 即 $\frac{R}{h_a}=\frac{MI}{AI}$；

(3) $MI=MC$；

(4) $\frac{MC}{AI}=\frac{CE}{IP}$，即 $\frac{MC}{AI}=\frac{\frac{a}{2}}{s-a}=\frac{a}{b+c-a}$.

原来公布的解答采用三角证法，较为繁难.

上面的证法，实际上得出：

$r_a=R$ 的充分必要条件是 O、I、N 共线.

这四道小题的证明均不太困难（其中(1)由面积，(2)，(4)由相似三角形，(3)由 $\angle MIC=\angle MCI$ 分别得出），可见一道难题常由几道简单的基本题组成. 基本题做得纯熟自如，难题也就不难了. 反之，如果一道难题做不出，往往是由于某个基

本题没有真正搞清楚.需要先“退一步”,将这个基本题解决好.

57. 又是角平分线

锐角三角形 ABC 中,AD 为角平分线,$\angle BAC=\alpha$,$\angle ADC=\beta$.如果

$$\cos\alpha=\cos^2\beta, \quad ①$$

求证:

$$BD\times DC=AD^2. \quad ②$$

本题当然要用一点三角,至少要用三角函数的定义(因为①中出现了三角函数).除此而外,均可以用纯几何的方法证明.

与上题相同,延长 AD 交外接圆于 M,连接外接圆圆心 O 与 M,OM 垂直平分 BC 于 E(图 99).

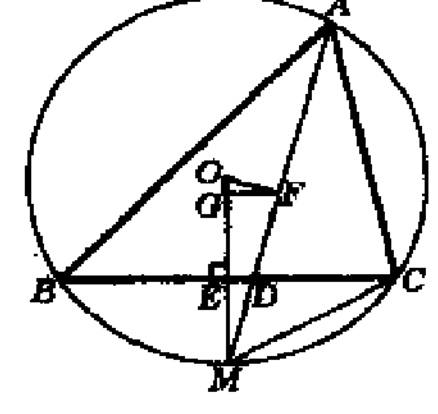


图 99

辅助线基本作好.由圆的相交弦定理,

$$BD\times DC=AD\times DM,$$

所以只需证明 D 是 AM 的中点.

现在必须做的一件事情,就是搞清 $\cos\alpha$ 的几何意义.

不妨设外接圆半径为 1.易知

$$\angle BOE=\frac{1}{2}\angle BOC=\angle BAC=\alpha,$$

所以

$$OE=\cos\alpha. \quad ③$$

当 α 为钝角时,③应修改为

$$OE = |\cos\alpha| \quad ④$$

(也可以约定 O 在三角形外时，弦心距 OE 为负，这样③不必修改，仍然成立)。

作 AM 的弦心距 OF. 同样(易知 $\angle ACM = \angle ACB + \angle BCM = \angle ACB + \angle BAM = \angle ACB + \angle MAC = 180° - \beta$)

$$OF = \cos\beta (= |\cos(180° - \beta)|).$$

这样，我们就在图上找到了 $\cos\alpha$ 与 $\cos\beta$. 再进一步，还应找出 $\cos^2\beta$.

易知 $\angle EOF = \angle ADC = \beta$，所以作 $FG \perp OE$，并交 OE 于 G，则

$$OG = OF\cos\beta = \cos^2\beta.$$

由①，G 必与 E 重合. 从而 OE 的垂线 GF 与 BC 重合，GF 与 AD 的交点 F 即 BC 与 AD 的交点 D. 于是 D 是弦 AM 的中点. 结论成立.

在本题中，隐含一个基本问题，即在单位圆中，圆周角 α 所对弦的弦心距是 $\cos\alpha$.

本题亦可用三角函数解，不必添辅助线(这是三角解法的优点. 但三角解法需要熟悉三角函数中的一些公式). 解法如下：

由正弦定理，

$$\frac{BD}{AD} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\beta - \frac{\alpha}{2}\right)},$$

$$\frac{CD}{AD} = \frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\sin\left(\beta + \frac{\alpha}{2}\right)}.$$

所以，

$$②\Leftrightarrow \sin^2\frac{\alpha}{2}=\sin\left(\beta-\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\beta+\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\Leftrightarrow 1-\cos\alpha=\cos\alpha-\cos 2\beta$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\alpha=1-\cos 2\beta$$

$$\Leftrightarrow ①.$$

58. 注意几何意义

在一个非钝角$\triangle ABC$中，$AB>AC$，$\angle B=45°$，O和I分别是$\triangle ABC$的外心和内心，且$\sqrt{2}\,OI=AB-AC$. 求$\sin A$.

本题是1998年中国数学奥林匹克的第一道题（黄宣国供题）.

关于外心、外接圆的定理与命题很多，最重要也是最常用的有正弦定理

$$2R\sin A=a,\ 2R\sin B=b,$$

等等.

关于内心、内接圆的定理与命题也很多.

如设I在三边上的射影分别为I_A，I_B，I_C，则

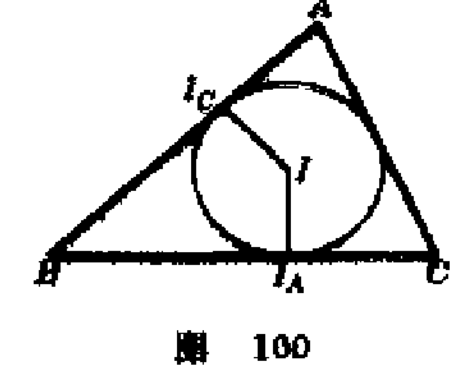


图 100

$$BI_A-I_AC=c-b,$$

$$BI_C-I_CA=a-b,$$

等等. 这是最常用的公式. 有些复杂的公式，如

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

则很少用到.

外心与内心的距离 $OI=\sqrt{R^2-2Rr}$（欧拉公式），也是比较深入的性质，远远超出中学教材. 在解题时，非万不得已不用.

解法以简明为上，所利用的工具也应尽量简单，通常不超出中学教材.

解这道题，应当与解其他关于三角形的问题一样，着重考察它的基本元素，即三条边 a,b,c 与三个角 A,B,C.

已知角 $B=45°$，所以由上面的正弦定理，

$$b=2R\sin45°=\sqrt{2}R.$$

A 是要求的，不会很容易得出，C 也如此（C 与 A 之和为 $135°$，知道一个就知道另一个）. 所以只能从三条边及已知条件 $\sqrt{2}OI=c-b$ 的几何意义入手.

由于 O 在三边上的射影 O_A，O_B，O_C 是三边的中点，所以

$$O_AI_A=\frac{c-b}{2},\qquad O_CI_C=\frac{a-b}{2}$$

（因为 $\triangle ABC$ 不是钝角三角形，所以 $\angle A$，$\angle C$ 均 $\geqslant 45°$，从而 b 是最小边）.

已知条件 $\sqrt{2}OI=c-b$ 导出

$$\frac{\sqrt{2}}{2}OI=O_AI_A,$$

即 OI 在 BC 上的射影 O_AI_A 与 OI 的夹角是 $45°$. 结合 $\angle B=45°$ 即知 $OI\perp AB$ 或 $OI\,/\!/\,AB$. 获得这个结果，是向问题的解决迈进了一大步.

如果 $OI\perp AB$，那么 $O_CI_C=0$，即 $a=b$，从而 $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形（$\angle C=90°$），$\angle A=45°$，$\sin A=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

这种情况是可能的，如图 101，任一等腰直角三角形 ABC ($\angle C=90°$) 中，OI 与 BC 的夹角为 $45°$，$c-b=2O_AI_A=\sqrt{2}OI$.

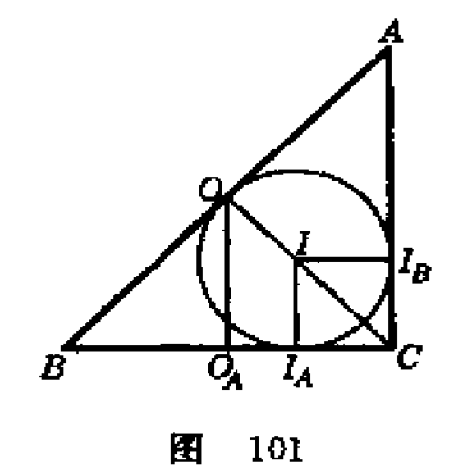


图 101

如果 $OI /\!/ AB$，那么

$$O_CI_C=OI=\sqrt{2}O_AI_A,$$

即

$$a-b=\sqrt{2}(c-b). \qquad ①$$

又由余弦定理

$$a^2+c^2-ac=b^2. \qquad ②$$

①，②都是三边之间的关系. 如果再有一个这样的关系即可解出 a,b,c. 第三个（独立的）关系并不存在. 不过我们要求的不是 a，而是 $\sin A$，所以只需求出 a,b,c 之比. 为此，不妨设 $R=1$，这时由前面的正弦定理

$$b=\sqrt{2}.$$

由①，$c=\dfrac{a+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$，代入②并化简得

$$a^2=4\sqrt{2}-2,$$

从而

$$\sin A=\frac{1}{2}a=\frac{1}{2}\sqrt{4\sqrt{2}-2}.$$

这种情况也是可能的. 我们先以 $a=\sqrt{4\sqrt{2}-2}$，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{a+2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ 为边作$\triangle ABC$. 由于它们适合②，所以$\angle B=45°$，并且外接圆半径 $R=1$.

取 AB，BC 中点 O_C，O_A，又在 AB，BC 上取点 I_C，I_A，使

$O_CI_C=a-b, O_AI_A=c-b$，构成矩形 OO_CI_CI'. 则 $OI' \underline{\parallel} O_CI_C$，从而 OI' 在 BC 上射影的长为 O_AI_A，于是 O_AI_A 是 OI' 在 BC 上的射影，从而 I' 即内心 I. 图 102 合乎所有条件.

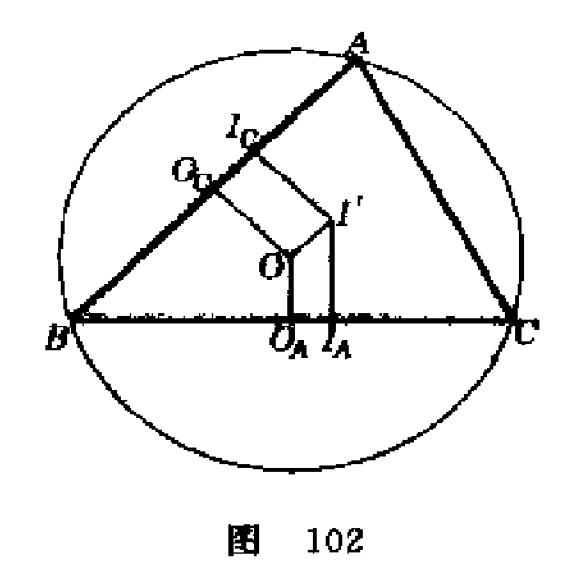


图 102

本题解法有两点值得注意：一是弄清条件 $\sqrt{2}\,OI=AB-AC$ 之几何意义，由此导出 $OI\perp AB$ 或 $OI\parallel AB$；二是在后一种情况，继续利用几何意义导出代数关系①，再结合②，求出三角形的基本元素 a,b,c（与 R 的比），从而求出 $\sin A$.

59. 得 用 三 角

设$\triangle ABC$ 的外接圆半径为 R，内切圆半径为 r，O 到三边的距离为 OD、OE、OF，则

$$OD+OE+OF=R+r. \qquad ①$$

①可以用纯几何的方法证明，但难以想到. 利用三角较为自然.

不妨设 $R=1$. 这时 $OD=\cos A$，等等，所以

$$\begin{aligned}&OD+OE+OF-1\\&=\cos A+\cos B+\cos C-1\\&=2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\sin^2\frac{C}{2}\\&=2\sin\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\end{aligned}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

而

$$r=\frac{S_{\triangle ABC}}{\frac{a+b+c}{2}}=\frac{bc\sin A}{a+b+c}$$

$$=\frac{4\sin A\sin B\sin C}{2(\sin A+\sin B+\sin C)}$$

$$=\frac{2\sin A\sin B\sin C}{4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$=4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2},$$

所以①式成立.

纯几何的证明可见《近代欧氏几何学》第 10 章 § 298 中的 f.

60. 2000年中国数学奥林匹克试题

下面是这届比赛的几何题:

设 $a\leqslant b\leqslant c$ 为 $\triangle ABC$ 的三条边,R,r 分别为外接圆与内切圆的半径,

$$f=a+b-2R-2r.$$

试用角 C 的大小来判定 f 的符号.

首先当 C 为直角时(图 103),

$$R=\frac{c}{2},r=\frac{a+b-c}{2},$$

所以

$$f=a+b-(c+a+b-c)=0.$$

当 C 为钝角时,如面 104,由于

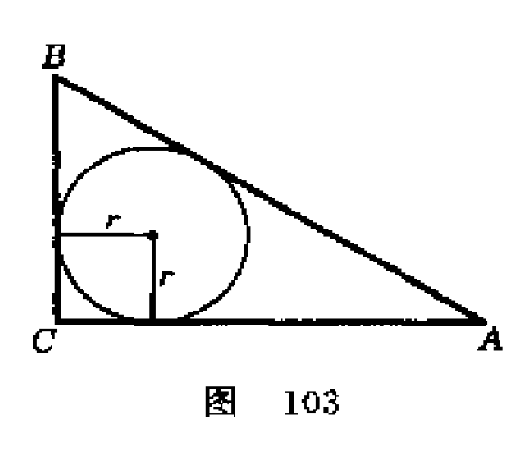


图　103

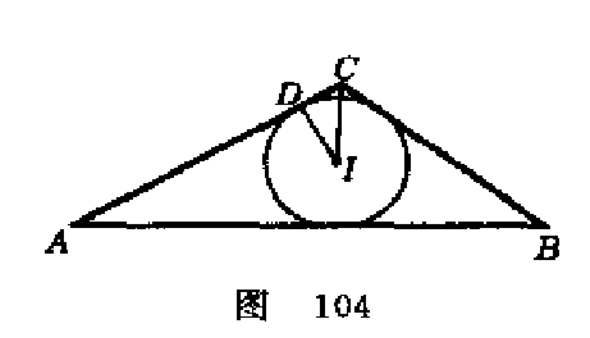


图　104

$$\angle ICD=\frac{1}{2}\angle ACB>45^{\circ}>\angle CID,$$

所以 $r=ID>CD=\frac{1}{2}(a+b-c)$. 因而 $2r+c>a+b$. 显然 $2R>2C$,所以 $f<0$.

当 C 为锐角时,情况比较复杂. 但上节我们已经知道

$$R+r=\cos A+\cos B+\cos C,$$

所以问题化为比较 $\sin A+\sin B$ 与 $\cos A+\cos B+\cos C$ 的大小.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}f&=\sin A+\sin B-\cos A-\cos B-\cos C\\
&=2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}-2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}\\
&\quad-\left(\cos^2\frac{C}{2}-\sin^2\frac{C}{2}\right)\\
&=2\cos\frac{A-B}{2}\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\\
&\quad-\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(\cos\frac{C}{2}+\sin\frac{C}{2}\right)\\
&=\left(\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\left(2\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)
\end{aligned}$$

因为 $C<90^{\circ}$, 所以 $\frac{C}{2}<45^{\circ}$, $\cos\frac{C}{2}>\sin\frac{C}{2}$, $\cos\frac{C}{2}-$

$\sin\frac{C}{2}>0.$

又 $C>B>A$，所以 $\frac{C}{2}>\frac{B-A}{2}>0$，

$$2\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}>$$
$$2\cos\frac{C}{2}-\cos\frac{C}{2}-\sin\frac{C}{2}>0.$$

于是此时 $f>0$.

这道几何题的解法以三角变形为主要技术. 如果竞赛中能有一道"纯几何解法"的题，似乎更受欢迎一些.

据说本题是一位印度数学家 Renlaobihutu 提出的问题.

（六）乐 作 舟

61. 吴伟朝先生的问题

学之者，不如好之者. 好之者，不如乐之者. 学习的乐处之一就是发现问题.

数学中有很多问题，不仅有古老的问题，还不断地涌现出许多新问题.

一个新问题，有时会引出一系列的新概念、新方法、新结果，甚至会由此产生一个新的数学分支. 因此，有时候提出一个问题比解决一个问题更重要.

我有一位朋友，广州大学的吴伟朝先生，他很喜欢提问题. 下面就是他在《美国数学月刊》上提的一道平面几何问题：

设 P 是 $\triangle ABC$ 的边 BC 上任意一点.

(a) 设 $\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 相切于 D. $\triangle ABP$，$\triangle ACP$ 的内心分别为 Q，R. 证明 $\angle QDR=90°$.

(b) 设 $\triangle ABC$ 的旁切圆与 BC 相切于 D'，$\triangle ABP$，$\triangle ACP$ 的旁心分别为 Q'，R'. 证明 $\angle Q'D'R'=90°$. 并且 $\triangle R'D'Q' \backsim \triangle QDR$.

(c) 证明 BC，QR，$Q'R'$ 三条直线共点或互相平行.

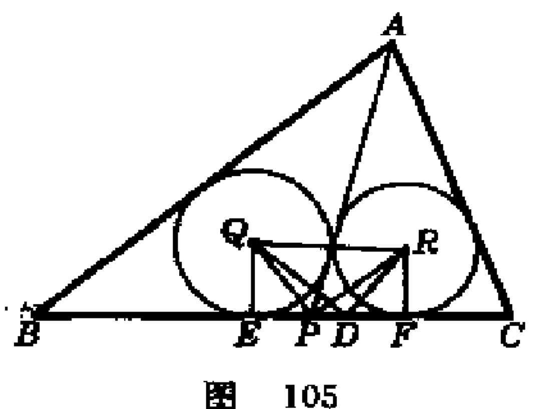


图 105

如图 105，设 $\odot Q$，$\odot R$ 分别与 BC 相切于 E，F，又设 AB

$=c, AC=b, AP=p, BP=x, PC=y$. 易知

$$PE=\frac{1}{2}(x+p-c),\quad PF=\frac{1}{2}(y+p-b),$$

$$BE=\frac{1}{2}(x+c-p),\quad CF=\frac{1}{2}(y+b-p),$$

$$BD=\frac{1}{2}(x+y+c-b),$$

$$CD=\frac{1}{2}(x+y+b-c).$$

所以 $$DE=BD-BE=\frac{1}{2}(y+p-b)=PF,$$

$$DF=CD-CF=\frac{1}{2}(x+p-c)=PE.$$

又易知$\angle QPR=90°$，$\triangle QEP\backsim\triangle PFR$，从而

$$QE\times FR=EP\times PF=DE\times DF.$$

于是$\triangle QED\backsim\triangle DFR$ 从而易知$\angle QDR=90°$.

同理可证$\angle Q'D'R'=90°$.

另外，注意 Q,P,D,R 四点共圆，所以$\angle RQD=\angle RPD$.

同理，$\angle Q'R'D'=\angle Q'PD'=\angle RPD$.

因此$\triangle R'D'Q'\backsim\triangle QDR$.

至于(c)，请参看下节.

62. 圆的位似中心

19 世纪末的大数学家克莱茵(F. Klein, 1849—1925)在他 1872 年担任埃尔朗根大学教授时发表的就职演说《关于新近几何学研究的比较考察》(后来称为埃尔朗根纲领)中，将几何学统一于变换群的观点.

相似就是一种常见的变换.

对于两个圆$\odot O_1$，$\odot O_2$，设外公切线的交点为$A_{1,2}$(它也是连心线与外公切线的交点)，则以$A_{1,2}$为位似中心，作相似变换，可以将$\odot O_1$变为$\odot O_2$.

在这个变换下，每一点P_1变为射线$A_{1,2}P$上的一点P_2，并且

$$A_{1,2}P_1 : A_{1,2}P_2 = r_1 : r_2,$$

其中r_1，r_2分别为$\odot O_1$，$\odot O_2$的半径.

在这个变换下，$A_{1,2}$是唯一的"不动点"，即变成自身的点. 而且，每一条变为自身的直线一定通过位似中心$A_{1,2}$.

如果再有一个圆$\odot O_3$. 设$\odot O_1$，$\odot O_3$的外公切线相交于$A_{1,3}$；$\odot O_2$、$\odot O_3$的外公切线相交于$A_{2,3}$. 那么，先以$A_{1,2}$为位似中心，作相似变换，将$\odot O_1$变为$\odot O_2$；再以$A_{2,3}$为位似中心，作相似变换，将$\odot O_2$变为$\odot O_3$. 这两次变换的结果将$\odot O_1$变为$\odot O_3$. 而直线$A_{1,2}A_{2,3}$在第一次变换下变为自身(因为它过位似中心$A_{1,2}$)，在第二次变换下也变为自身(因为它过位似中心$A_{2,3}$)，从而结果仍变为自身. 因此，直线$A_{1,2}A_{2,3}$通过将$\odot O_1$变为$\odot O_3$的位似中心$A_{2,3}$.

于是，我们有定理：

三个圆，两两的位似中心三点共线.

考虑内公切线的交点，可以得到类似的结果. 为了区别起见，内公切线的交点称为两圆的内位似中心. 而前面所说的外公切线的交点称为外位似中心.

现在不难解答第 57 节吴伟朝先生的问题了.

设$\odot Q$，$\odot R$的位似中心为M，$\odot Q$，$\odot R'$的位似中心为N，$\odot Q'$，$\odot R'$的位似中心为M'. 则根据上面的结论，M，N，A三点共线(注意A是$\odot Q$，$\odot Q'$的位似中心)，M'，N，A三点

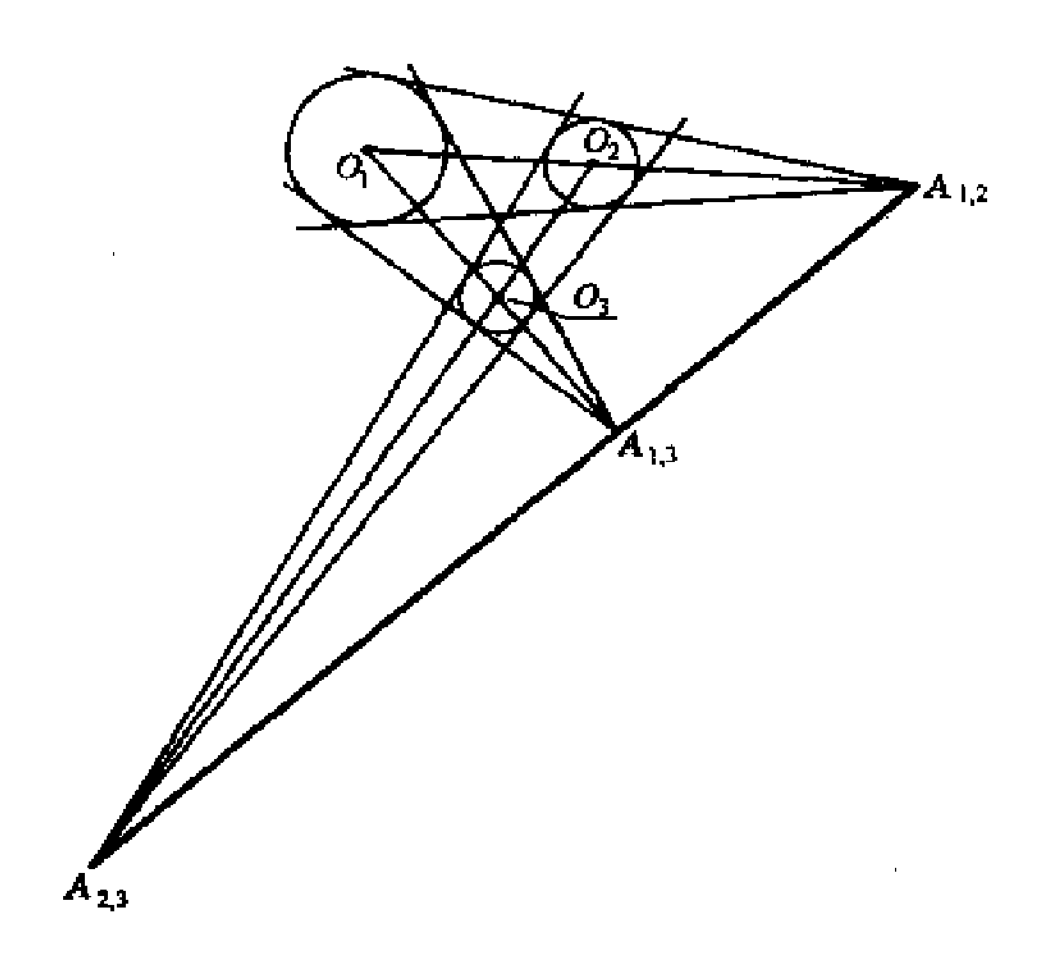


图 106

共线.从而 M,N 都是 AR 与 BC 的交点,这两点必定重合.即 QR,$Q'R'$,BC 三条直线交于同一点 M.

唯一的例外出现在 $QR /\!/ BC$ 时.这时$\odot Q$,$\odot R$ 的半径相等,$AB=AC$ 并且 AP 是高,易知$\odot Q'$,$\odot R'$的半径也相等.因此 QR,BC,$Q'R'$ 互相平行.

63. 马尔法提问题

意大利数学家马尔法提(Malfatti,1731—1807)于 1803 年提出一个作图问题:

在已知的三角形内作三个圆,两两相切,并且每一个圆与三角形的两条边相切.

斯坦纳(Steiner,1796—1863)1826年给出的作法最为简单.

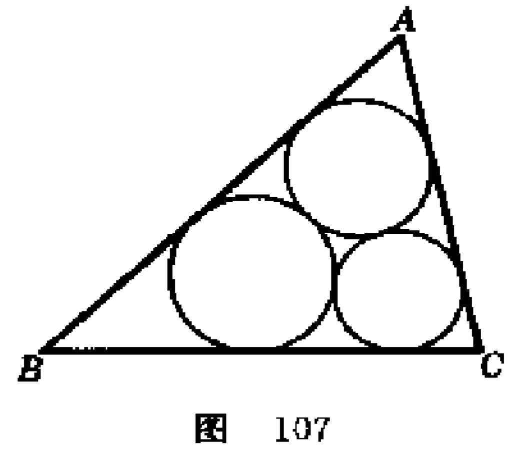


图 107

首先作$\triangle ABC$的三条角平分线,定出内心I.

然后作$\triangle IBC$,$\triangle ICA$,$\triangle IAB$的内切圆.每两个圆已有一条内公切线(分别为IC,IB,IA),再作另一条内公切线OP,QR,ST.

最后作圆与AB,AC,OP相切,作圆与AB,BC,QR相切,作圆与BC,CA,ST相切.

这三个圆即满足要求.

作法虽然不长,但真正去作却不容易作得准确.证明更是一件相当困难的工作.

64. 叶中豪先生的问题

我的好朋友叶中豪先生是位几何爱好者.这本书中,如果有他的题,是件有意思的事.所以本节就介绍一个他提的问题.

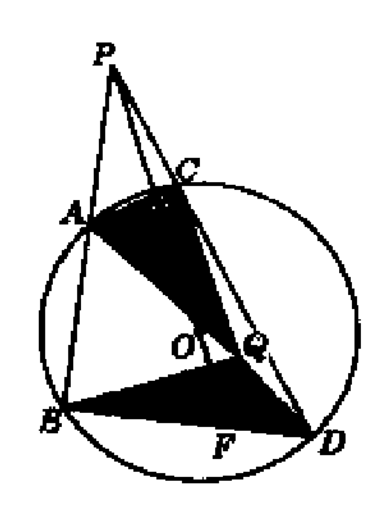


图 108

设$\odot O$的弦BA,DC的延长线相交于P,直线PO分别交AC,BD于E,F.过E作AC的垂线,过F作BD的垂线,相交于Q(图108).

求证:$S_{\triangle QAC}=S_{\triangle QBD}$. ①

如果设$\angle OEA=\alpha$,$\angle OFB=\beta$,那么由正弦定理,

$$\frac{QE}{QF}=\frac{\sin\angle QFE}{\sin\angle QEF}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha}.$$

所以要证的结论即

$$\frac{AC}{BD}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \quad ②$$

过 P 作 OP 的垂线，设它分别与直线 AC，BD 相交于 R，Q. 由蝴蝶定理，

$$RP=PQ.$$

又$\angle CRP=90°-\alpha$，$\angle BQP=90°-\beta$，所以由正弦定理，

$$\frac{PC}{\cos\alpha}=\frac{RP}{\sin\angle ACP}=\frac{PQ}{\sin\angle ABQ}=\frac{PB}{\cos\beta},$$

从而
$$\frac{\cos\alpha}{\cos\beta}=\frac{PC}{PB}.$$

又由$\triangle PAC\backsim\triangle PDB$，

$$\frac{PC}{PB}=\frac{AC}{BD}.$$

所以②，①成立.

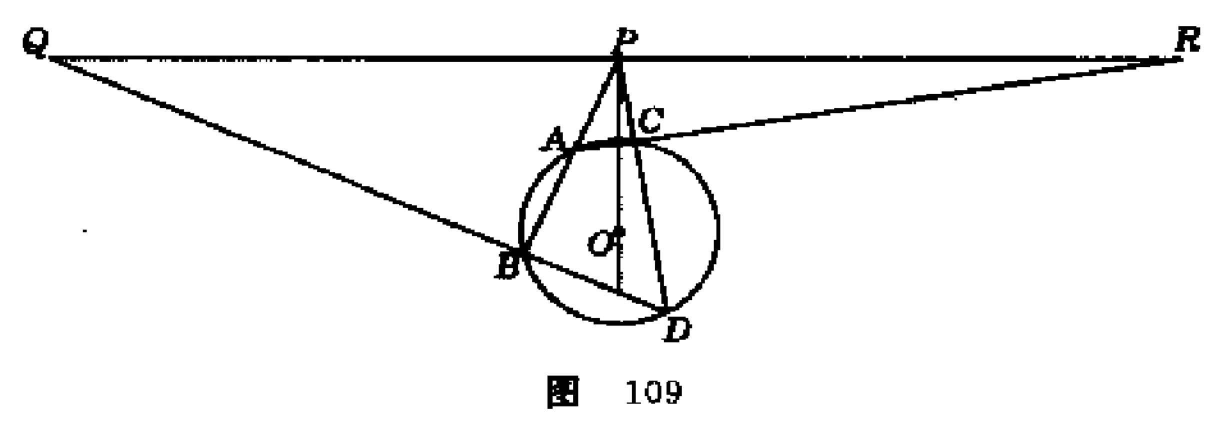


图 109

65. 国际会议上的问题

大概是 1984 年吧，国际双微（微分几何、微分方程）在我国召开. 会上有人提出一个初等的问题：

在$\triangle ABC$的边上取三个点D,E,F，使得沿着三角形的周界从D到E，从E到F，从F到D，所走的长都相等(即都等于$\triangle ABC$的周长$a+b+c$的$\frac{1}{3}$)．求证：

$$\triangle DEF \text{ 的周长} \geqslant \frac{1}{2}(a+b+c). \qquad ①$$

这道题出乎意料地难倒不少数学家．在会议期间没有能够解决．会后又有不少人研究．1987年，陶懋颀、张景中、杨路在《中国科学》第8期"用多点例证法证明一个几何不等式"一文中给出了一个证明．曾振权也给出一个证明．后来发现1960年，A. Zirakzadeh已有一个初等几何的证明，但非常复杂．

杨学枝等给出一个简单的初等证明．

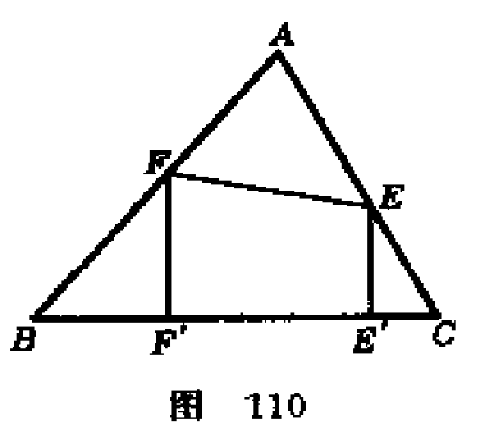


图 110

如图110，设E,F在BC上的射影分别为E',F'，则



$$EF \geqslant E'F' = a - (BF\cos B + CE\cos C).$$

同样的几个式子相加，得

$$\triangle DEF \text{ 的周长} \geqslant \frac{1}{3}(a+b+c)(3-\cos A-\cos B-\cos C).$$

由于$\cos A+\cos B+\cos C \leqslant \frac{3}{2}$，从而①式成立．

66. 孙斌勇同学的问题

某年，当时在教育部理科试验班读书的孙斌勇同学提出一个问题：

P,Q 在$\triangle ABC$中,并且

$$PA+BC=PB+CA=PC+AB,$$

$$QA-BC=QB-CA=QC-AB.$$

求证:P,Q与内心I共线.

问题颇为有趣,证明不太容易.

设内切圆与BC,CA,AB分别切于D,E,F.分别以A,B,C为圆心,AF,BD,CE为半径作圆.

不难证明$PA>AF$(我们将这个证明补在最后),而且$AF=s-a$,$BD=s-b$,$CE=s-c$,所以

$$PA-AF=PB-BD=PC-CE,$$

$$QA+AF=QB+BD=QC+CE.$$

以P为圆心,$PA-AF$为半径作圆,这圆与$\odot A$,$\odot B$,$\odot C$均外切.

以Q为圆心,$QA+AF$为半径作圆,这圆与$\odot A$,$\odot B$,$\odot C$均内切.

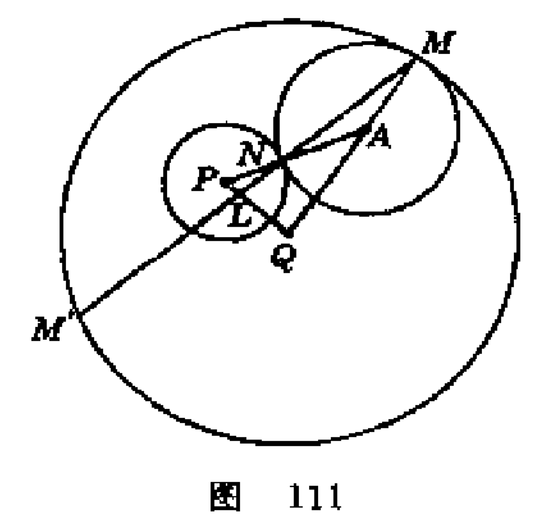


图 111

设$\odot A$分别与$\odot Q$,$\odot P$相切于M,N,直线MN再交$\odot Q$于M',交PQ于L(图111).

由门奈劳斯定理,

$$\frac{MA}{MQ}\times\frac{NP}{NA}\times\frac{LQ}{LP}=1,$$

所以 $$\frac{LP}{LQ}=\frac{NP}{MQ}.$$

NP,MQ分别为$\odot P$,$\odot Q$的半径,所以L是$\odot P$,$\odot Q$的内位似中心.

L对$\odot A$的幂是

$$LN\times LM=LM'\times LM\times\frac{LN}{LM'},$$

其中 $LM \times LM'$ 是 L 对 $\odot Q$ 的幂，而由于 L 是内位似中心，$\frac{LN}{LM'}$ 是 $\odot P$，$\odot Q$ 的半径之比. 于是 $\odot L$ 对 $\odot B$，$\odot C$ 的幂也都是同样的值，从而 L 是 $\odot A$，$\odot B$，$\odot C$ 的根心.

但内心 I 显然是 $\odot A$，$\odot B$，$\odot C$ 的根心(I 到这三个圆的切线的长即内切圆的半径). 因此 L 与 I 重合，P、Q、I 三点共线.

最后说明一下 $PA > AF$.

显然 $PB+PC>BC$，$PC+PA>CA$，$PA+PB>AB$，所以三式相加得

$$PA + PB + PC > s.$$

而

$$AF + BD + CE = (s-a) + (s-b) + (s-c) = s,$$

所以

$$PA + PB + PC > AF + BD + CE,$$

$$(PA - AF) + (PB - BD) + (PC - CE) = 3(PA - AF) > 0.$$

因此 $PA > AF$.

注记：在国外，P，Q 两点分别被称为外索迪圆和内索迪圆的圆心. 索迪(Frederick Soddy，1877—1956)是英国化学家，因发现同位素而获得 1921 年诺贝尔化学奖.

深入的研究表明，不但内心 I 落在 P，Q 连线上，而且 $\triangle ABC$ 的 Gergonne 点也位于这条直线上，且这四点恰好构成调和点列.

关于 P，Q 两点还有不少进一步的研究结果. 20 世纪 60 年代～90 年代，有多篇文献涉及其性质的探讨. 例如 P 点具有如下奇妙的特性：过 P 点的三条塞瓦线刚好可把 $\triangle ABC$ 分割成三个圆外切四边形. 其他点都不具备这一性质.



图 112

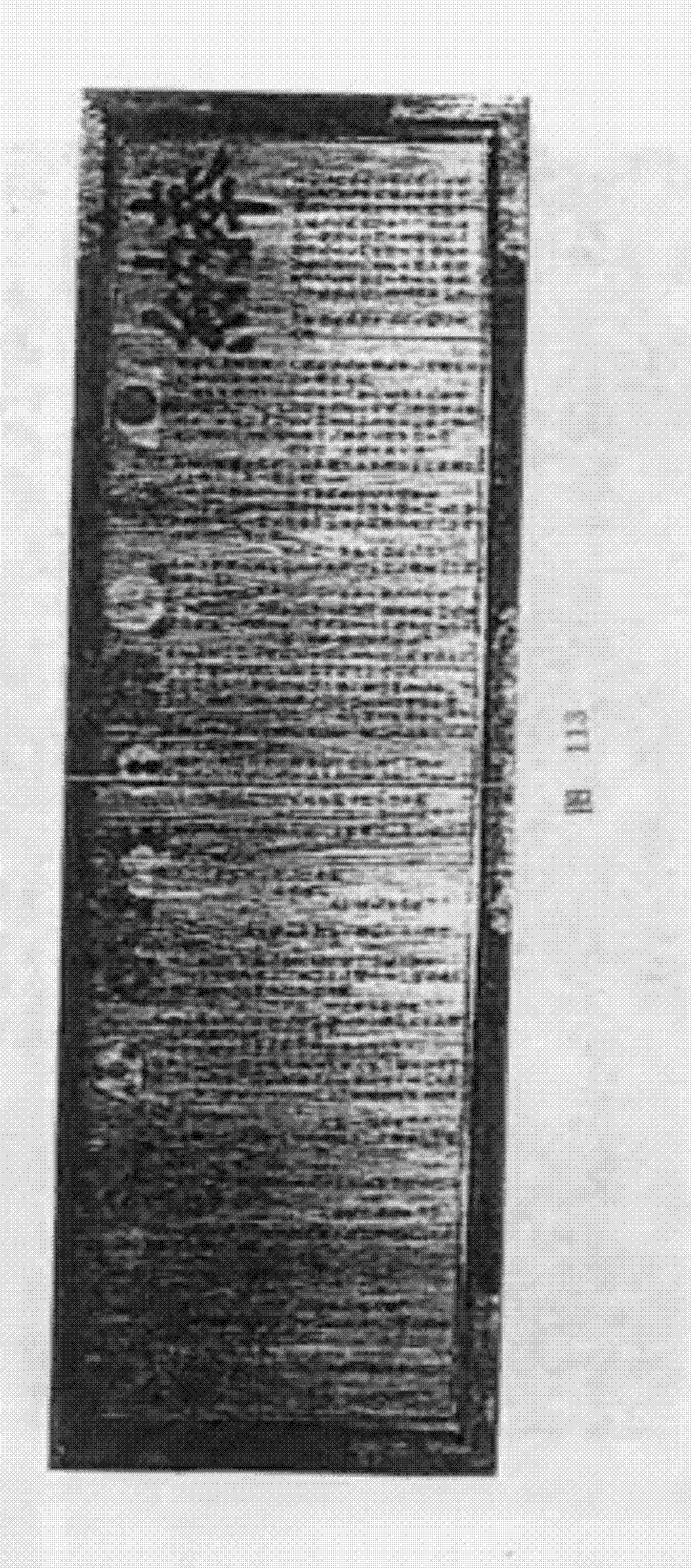


图 113

需要指出的是，P，Q 两点的存在是有条件的，原三角形的最大角不能超过 $2\arcsin\frac{4}{5}$. 这相当于$\triangle ABC$ 的基本元素必须满足条件

$$a+b+c>4R+r,$$

其中 R，r 分别表示$\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆的半径. 否则，这两点就不存在了.

67. 寺庙里的几何题(一)

日本古代的寺庙里常常悬挂一些木牌，上面铭刻着数学家发现的定理. 下面的两个图是最近发现的.

本节先介绍一道题，它是 1832 年牛岛(Ushijima)的一个定理.

已知图 114 中，$\odot O_i$ 的半径为 $r_i(i=1,2,3,4)$.

求证：$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}$.

证法不太难(比想像的要简单得多)，但有两点值得注意. 首先将要证的结论改为

$$\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}=\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}. \quad ①$$

这样，我们就只需要证明

$$\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}=c, \quad ②$$

$$\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}=c, \quad ③$$

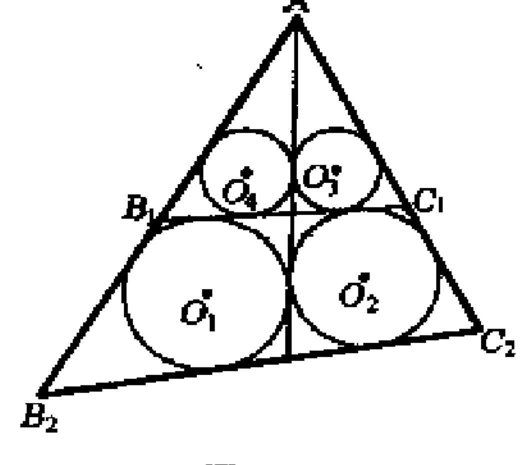


图 114

其中 c 是一个常数，只与 A 点及直线 B_1C_1，B_2C_2 有关. 换句话说，我们将“连体婴儿”分

开，只需单独考虑圆形的左半边与右半边.

其次，B_2C_2 这条线也可撤去，而换成$\odot O_1$ 的、与 B_1C_1 平行的切线（图 115）. 从而设 A 到 B_1C_1 的距离为 h，便有

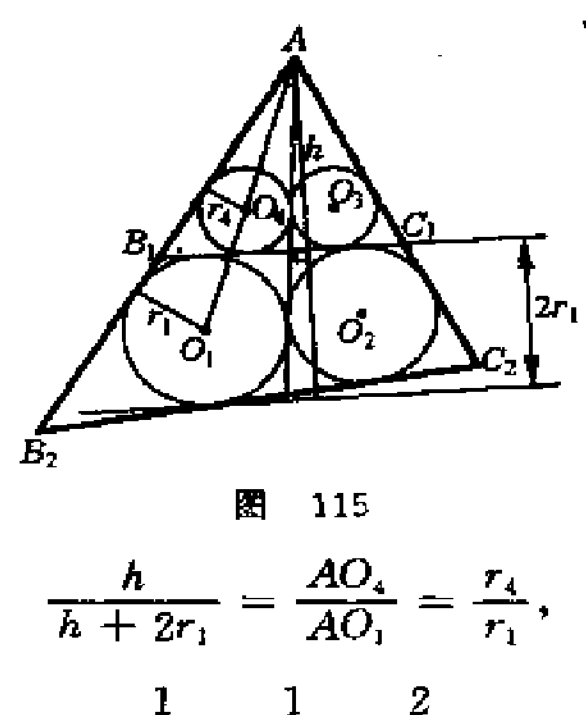


图 115

$$\frac{h}{h+2r_1}=\frac{AO_4}{AO_1}=\frac{r_4}{r_1},$$

即
$$\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}=\frac{2}{h}.$$

同理
$$\frac{1}{r_3}-\frac{1}{r_2}=\frac{2}{h}.$$

所以结论成立.

68. 寺庙里的几何题（二）

日本的深川（Fukagawa）专门写了两本书《Japanese Temple Geometry Problems》,《Japanese Mathematics Problems of the 18th and 19th Centuries》. 介绍日本寺庙里的几何题.

本节从中摘选一些问题：

1. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=3$，$BC=4$. C'在 AB 上，

$BC'=BC$. P 在 BC 上，$C'P$ 平分$\triangle ABC$ 的面积. 求 PC'（图 116).

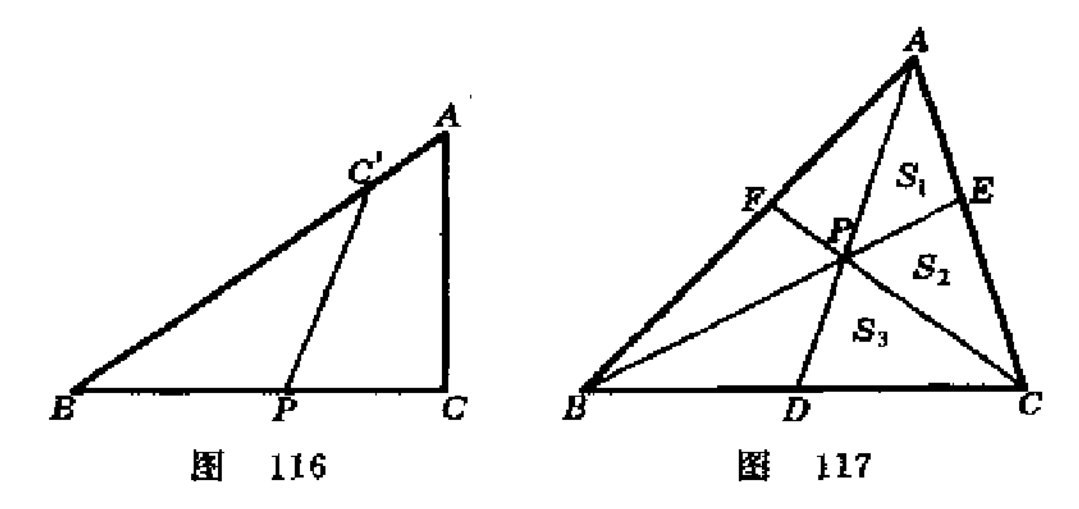


图 116　　　　图 117

2. P 在$\triangle ABC$ 内，AP，BP，CP 分别交对边于 D，E，F. 已知图中面积 S_1，S_2，S_3，求$\triangle ABC$ 的面积(图 117).

3. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，I 为内心. 求证 $AI\cdot BI=\sqrt{2}AB\cdot r$(图 118).

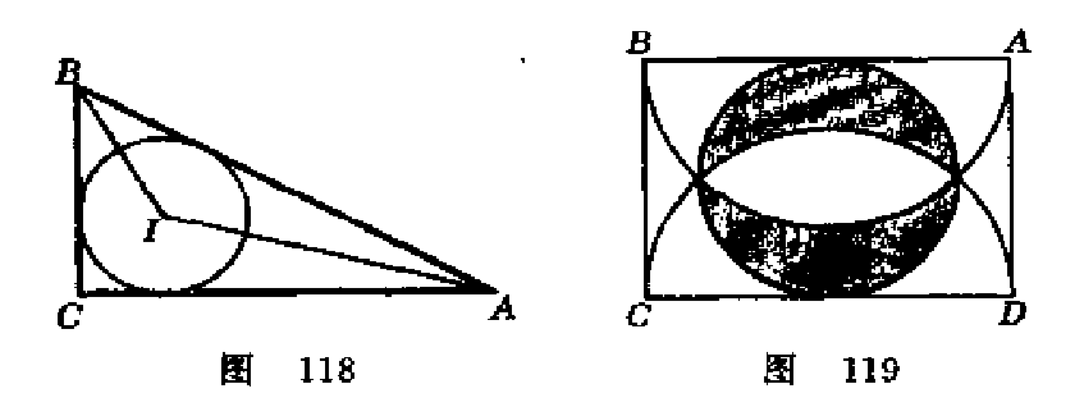


图 118　　　　图 119

4. 矩形 $ABCD$ 中，$AB=4$，$BC=2\sqrt{2}$. 分别以 AB，CD 为直径，在矩形内作半圆. 又过它们的两个交点作圆与 AB，CD 相切. 求图中阴影部分(两个月形)的面积(图 119).

5. $\triangle ABC$ 是等边三角形，边长为 10. 过 A 作不穿过三角形的直线 l. $\odot(O_1,r_1)$与 AB，l，BC 相切. $\odot(O_2,r_2)$与 AC，l，BC 相切. 证明当 l 变化时，r_1+r_2 始终为常数(面 120).

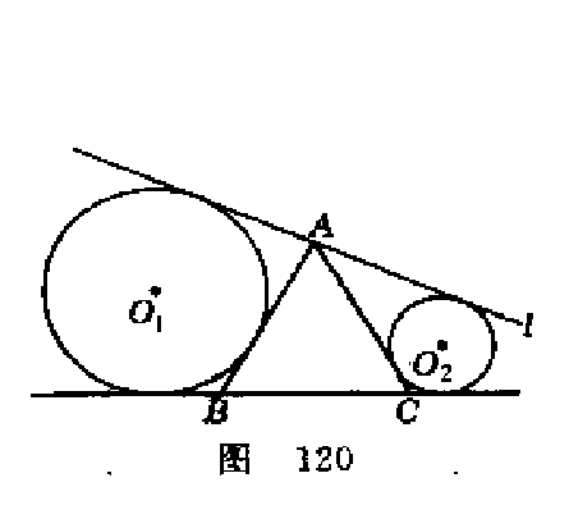


图 120

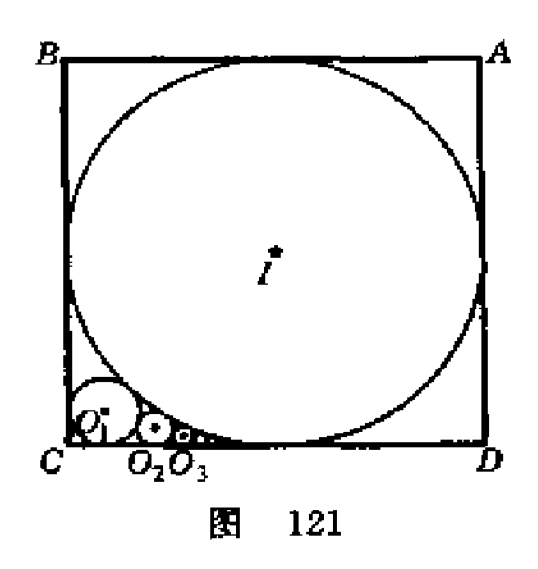


图 121

6. 正方形 $ABCD$ 边长为 10，$\odot r$ 是内切圆. 作圆列 $\odot(O_i, r_i)$ $(i=1,2,\cdots)$；$\odot(O_1, r_1)$ 与 CD, CB 及 $\odot I$ 相切；$\odot(O_2, r_2)$ 与 CD, $\odot O_1$, $\odot I$ 相切；……求 r_n（图 121）.

7. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$. 作三个正方形及三个圆 $\odot(O_i, r_i)$ $(i=1,2,3)$. 证明 $r_1r_3=r_2^2$（图 122）.

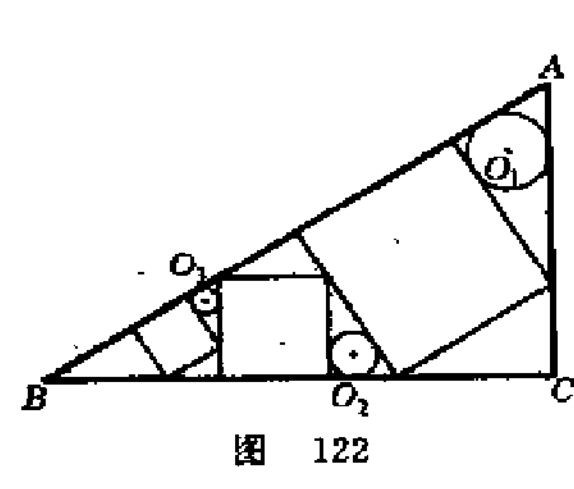


图 122

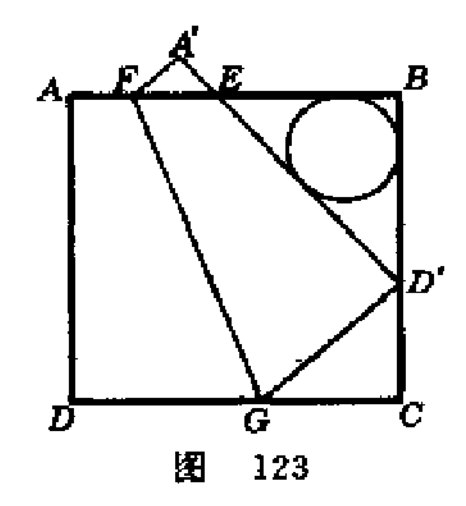


图 123

8. 正方形纸片 $ABCD$ 折叠时 D 落到 BC 上一点 D'，A 落到 A'. $A'D'$ 交 AB 于 E. 作 $\triangle BED'$ 的内切圆. 证明它的半径等于 $A'E$（图 123）.

9. $\triangle ABC$ 中，$\angle C=90°$，$AC=4$，$BC=3$. $\odot(O_1, r_1)$，$\odot(O_2, r_2)$，$\odot(O_3, r_3)$ 分别为 $\triangle ADG$，$\triangle EBF$，$\triangle GFC$ 的内切圆，$DEFG$ 是一个矩形. 证明当 $DEFG$ 的面积最大时，$r_1^2+r_2^2$

$=r_3^2$(图 124).

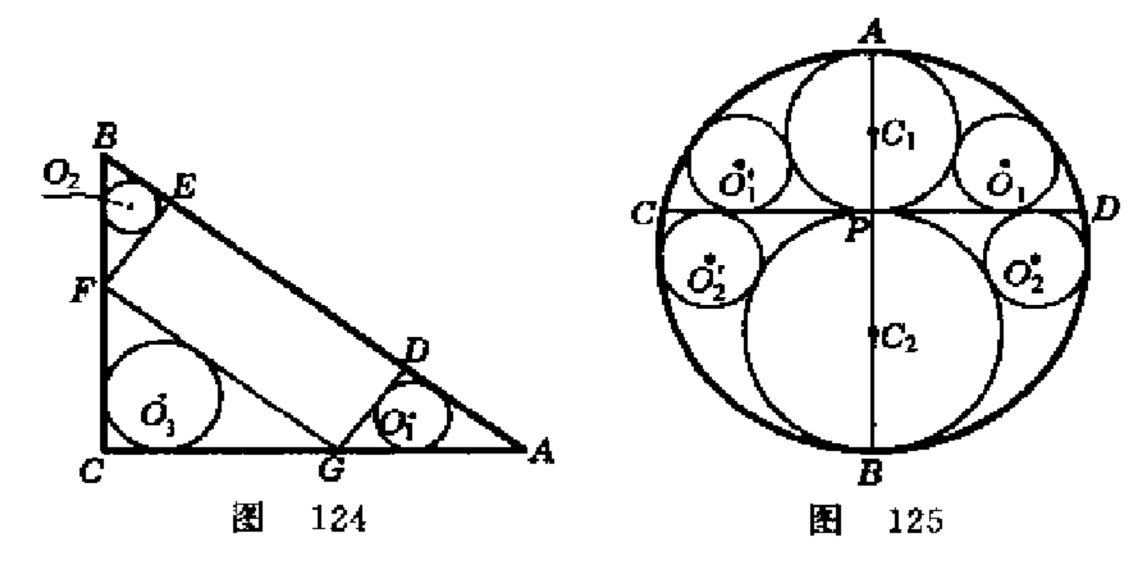


图 124　　　　图 125

10. $\odot O$ 的直径 $AB=10$，弦 $CD\perp AB$，垂足为 P，$PA=4$. $\odot C_1$，$\odot C_2$ 分别以 PA，PB 为直径. $\odot(O_1,r_1)$，$\odot(O_2,r_2)$ 均与 $\odot O$ 内切，并均与 CD 相切. $\odot(O_1,r_1)$ 与 $\odot C_1$ 外切，$\odot(O_2,r_2)$ 与 $\odot C_2$ 外切. 求证 $r_1=r_2$(图 125).

11. 四边形 $ABCD$ 有外接圆，又有内切圆 $\odot(I,r)$(注：图中未画出)，切点为 E,F,G,H. 求证四边形 $AEIH$，$EBFI$，$IFCG$，$IGDH$ 都有内切圆. 设这四个内切圆为 $\odot(I_i,r_i)$($i=1,2,3,4$)，求证：$r_1+r_3=r_2+r_4=r$(图 126).

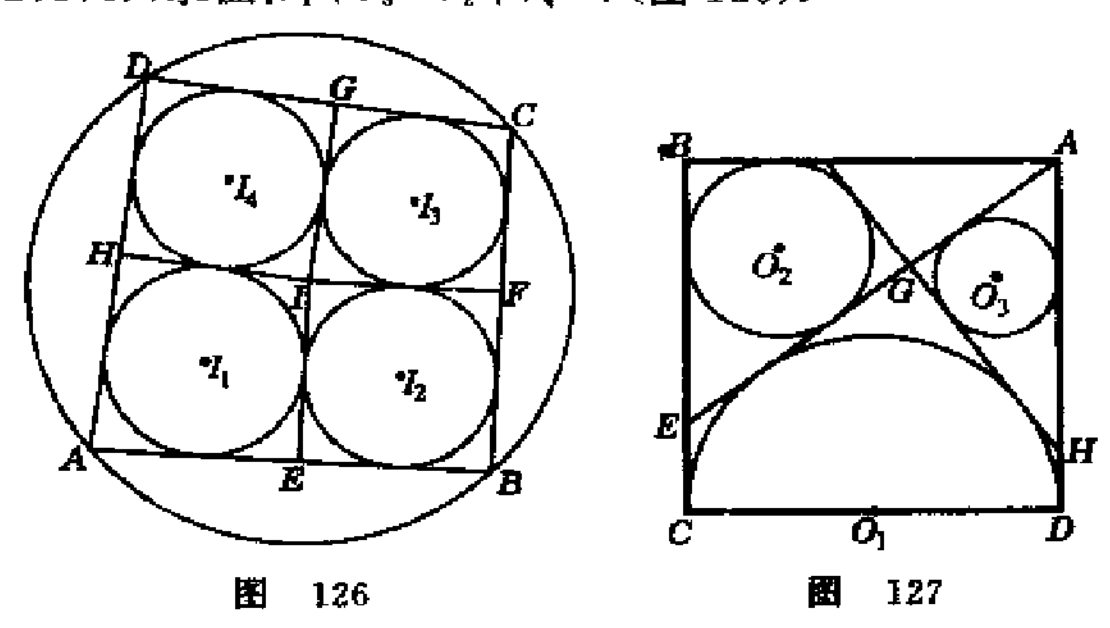


图 126　　　　图 127

12. 正方形 $ABCD$ 的边长为 4. 半圆以 CD 为直径，圆心为 O_1，半径为 r_1. AE 与半圆相切，E 在 BC 上. $\odot(O_2,r_2)$ 是 $\triangle ABE$ 的内切圆. $\odot O_1$，$\odot O_2$ 的一条外公切线交 AD 于 H，交 AE 于 G. $\odot(O_3,r_3)$ 是 $\triangle AGH$ 的内切圆. 求 r_2，r_3（图 127）.

13. 等边三角形 ABC 的边长为 10. 线段 AA'，BB'，CC' 围成等边三角形 $A'B'C'$. 如果 $\triangle A'B'C'$，$\triangle ABB'$，$\triangle BCC'$，$\triangle CAA'$ 的内切圆半径都是 r，求 r（图 128）.

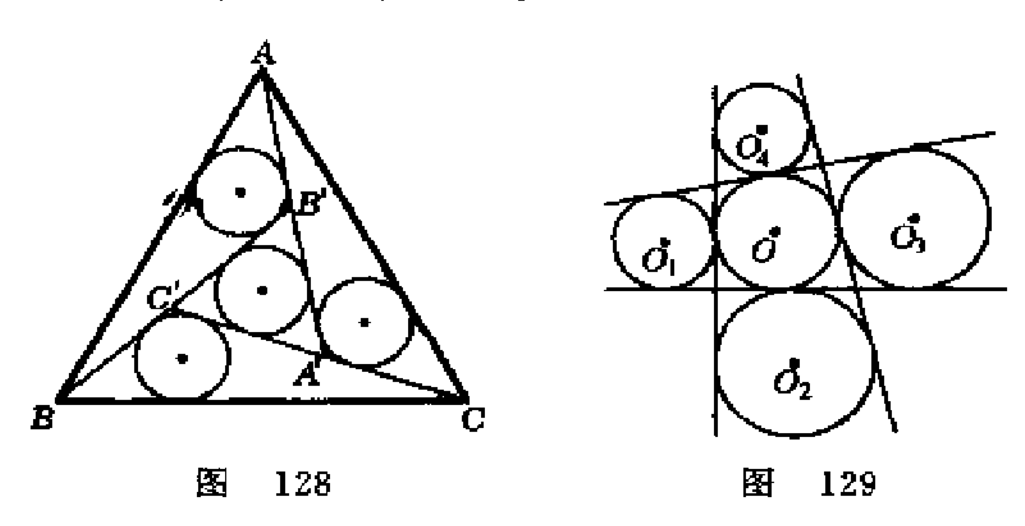


图 128　　图 129

14. $\odot(O,r)$ 的四条切线分别与四个圆：$\odot(O_i,r_i)$（$1\leqslant i\leqslant 4$）相切. 求证：$r_1r_3=r_2r_4$（图 129）.

15. P 在 $\odot(O,r)$ 中，四个圆 $\odot(O_i,r_i)$（$i=1,2,3,4$）都过 P，并与 $\odot O$ 内切. $\odot O_1$，$\odot O_3$ 在 P 点外切，$\odot O_2$，$\odot O_4$ 也在 P 点外切. 求证 $\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_3}=\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_4}$（图 130）.

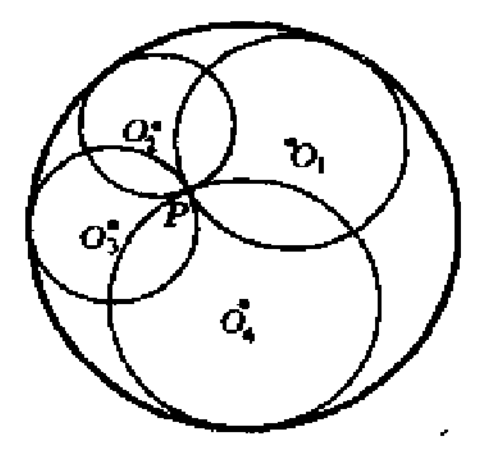


图 130

16. 正三角形 CDP 在边长为 10 的正方形 $ABCD$ 中，AP 交 BC 于 Q. 证明可以在 CD 上找一点 R

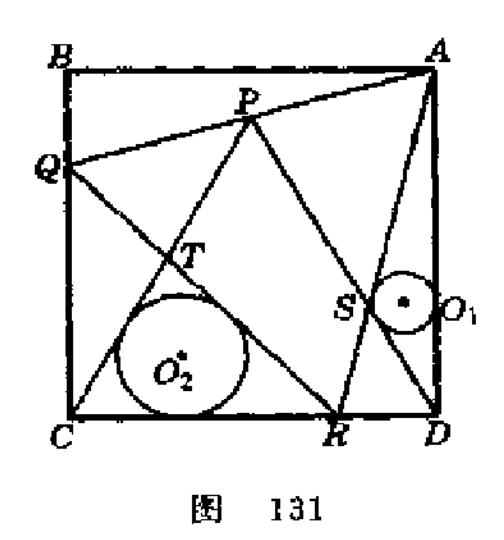


图 131

使$\triangle AQR$为正三角形．求出图中两个圆的半径r_1,r_2，并证明$2r_1=r_2$(图 131)．

17. $\odot(O_1,r_1)$与$\odot(O_2,r_2)$外切，并分别切直线l于A，B．$\odot(O_3,r_3)$与$\odot O_1$，$\odot O_2$外切并与l相切．证明不论r_1,r_2如何变化，$\odot O_3$与一个过A,B的固定圆相切(图 132)．

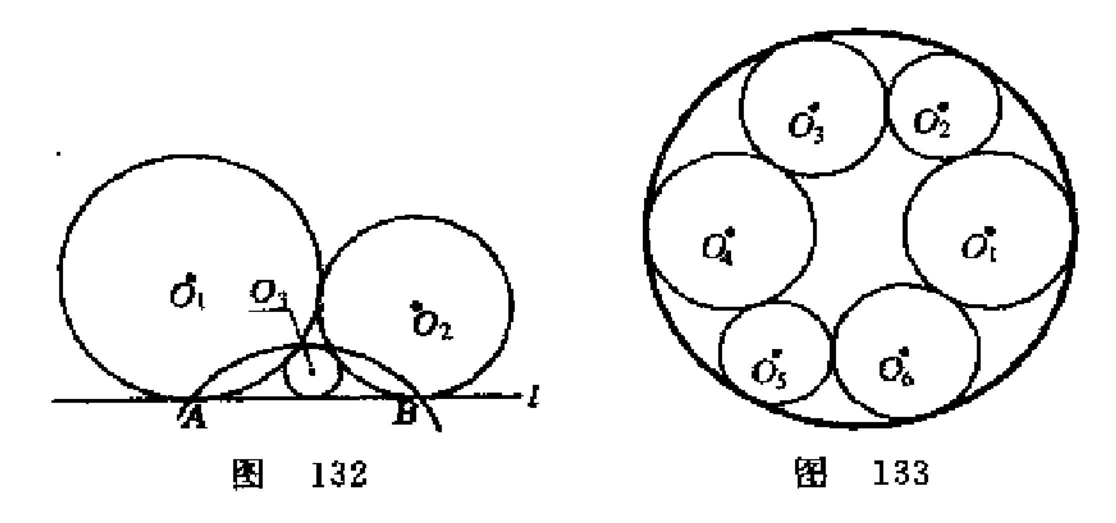


图 132　　　　图 133

18. $\odot(O,r)$内有 6 个圆：$\odot(O_1,a)$，$\odot(O_2,b)$，$\odot(O_3,c)$，$\odot(O_4,a)$，$\odot(O_5,b)$，$\odot(O_6,c)$均与$\odot O$内切，并依次外切．如果$r\geqslant a+b+c$，证明$r=a+b+c$，并且$O_1O_2 /\!/ O_3O_6$(图 133)．

19. $\triangle ABC$中，$\odot(O_1,r_1)$与AB，AC相切．BD、CE是

$\odot O_1$ 的切线，相交于 F. $\odot(O_2, r_2)$ 是 $\triangle FBC$ 的内切圆. 将 r_2 用边长 a, b, c 及 r_1 表示(图 134).

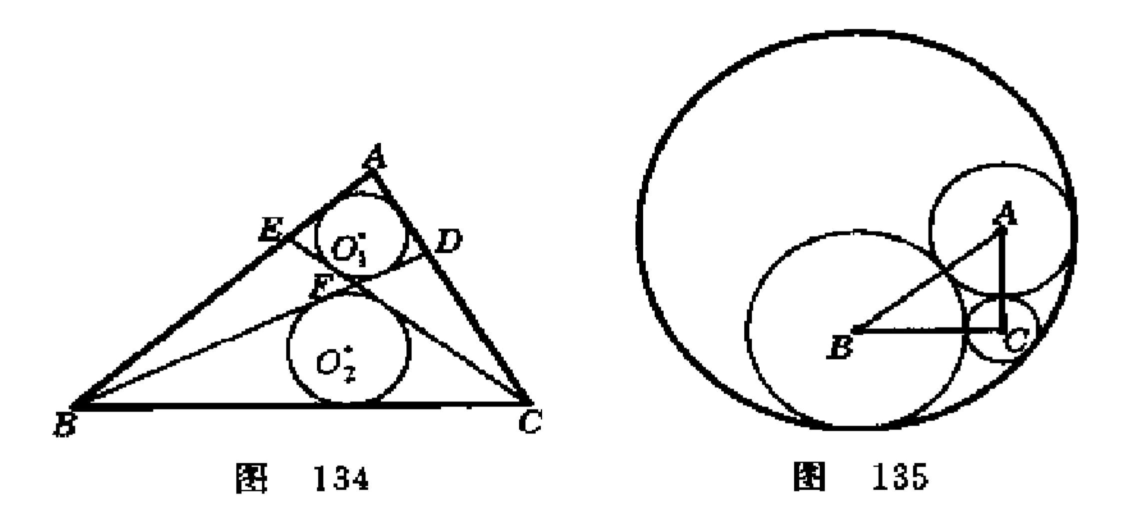


图 134　　图 135

20. $\odot(A, r_1)$, $\odot(B, r_2)$, $\odot(C, r_3)$ 互相外切，并与 $\odot(O, r)$ 内切. 如果 $\angle C=90°$, $AC=3$, $BC=4$, $AB=5$, 求 r_1, r_2, r_3 及 r，并证明 $r=r_1+r_2+r_3$(图 135).

69. 寺庙里的几何题(三)

本节给出上节问题的解答.

1. 取 AB 中点 E，连接 CE. 则因为

$$\frac{S_{\triangle BPC'}}{S_{\triangle ABC}}=\frac{BP \times BC'}{AB \times BC}=\frac{BP}{AB}=\frac{1}{2},$$

所以
$$BP=\frac{1}{2}AB=CE.$$

从而
$$\triangle BEC \cong \triangle BPC',$$

$$PC'=CE=\frac{AB}{2}=\frac{5}{2}.$$

2. $\dfrac{AP}{PD}=\dfrac{S_1+S_2}{S_3}$, $\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{S_2}{S_1}$. 由门奈劳斯定理,

$$\frac{BC}{DB}=\frac{AP}{PD}\cdot\frac{CE}{EA}=\frac{S_2(S_1+S_2)}{S_1S_3}.$$

所以由此得性质

$$\frac{BC}{DC}=\frac{S_2(S_1+S_2)}{S_1S_2+S_2^2-S_1S_3}.$$

$$S=(S_1+S_2+S_3)\frac{BC}{DB}$$

$$=\frac{S_2(S_1+S_2)(S_1+S_2+S_3)}{S_1S_2+S_2^2-S_1S_3}.$$

3. $\angle AIB=90°+\frac{1}{2}\angle CBA+\frac{1}{2}\angle CAB$

$$=135°,$$

$$S_{\triangle AIB}=\frac{1}{2}r\cdot AB=\frac{1}{2}AI\cdot IB\cdot\sin 135°,$$

所以 $\sqrt{2}\cdot AB=AI\cdot IB$.

4. $BC=\frac{AB}{\sqrt{2}}$. 弓形的圆心角为直角.

所求面积

$$=2\times\left[\frac{1}{2}\times\pi\times\left(\frac{AB}{2\sqrt{2}}\right)^2-\frac{\pi}{4}\left(\frac{AB}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{AB}{2}\right)^2\right]$$

$$=\frac{AB^2}{4}=4.$$

5. 两条外公切线的和$=3\times10=30$,所以

$$\frac{r_1}{\sqrt{3}}+10+\frac{r_2}{\sqrt{3}}=\frac{30}{2},\quad r_1+r_2=5\sqrt{3}.$$

6. $IC=5+(1+\sqrt{2})r_1$,所以 $r_1=5(3-2\sqrt{2})$. 由

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}+\frac{1}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}$$

得
$$\frac{1}{\sqrt{r_n}}-\frac{1}{\sqrt{r_1}}=\frac{n-1}{\sqrt{5}},$$

$$r_n=\left(\frac{\sqrt{5}}{n-1+\sqrt{3+2\sqrt{2}}}\right)^2=\frac{5}{(n+\sqrt{2})^2}.$$

7. 设三个正方形的边长为 $t_1 \geqslant t_2 \geqslant t_3$. 图中以 t_1 为一条直角边，一个锐角为 B 的直角三角形与以 t_2 为一条直角边，一个锐角为 B 的直角三角形相似，而它们的内接正方形边长分别为 t_2，t_3，所以

$$\frac{t_1}{t_2}=\frac{t_2}{t_3},$$

即 t_1，t_2，t_3 成等比数列.

又分别以⊙O_1，⊙O_2，⊙O_3 为内切圆的三个直角三角形相似，而它们对应的直角边长为 t_1，t_2，t_3，所以

$$t_1 : t_2 : t_3 = r_1 : r_2 : r_3.$$

从而 r_1，r_2，r_3 也成等比数列，即

$$r_2^2=r_1r_3.$$

8. 设正方形边长为 1，$DG=x$，$CD'=y$，则 $GC=1-x$，$D'B=1-y$，$GD'=x$. 由相似，

$$D'E=x\cdot\frac{1-y}{1-x},\qquad BE=y\cdot\frac{1-y}{1-x}.$$

$r=A'E \Leftrightarrow BD'+BE-D'E=2(1-D'E) \Leftrightarrow x\cdot\dfrac{1-y}{1-x}=\left(1-\dfrac{1-y}{1-x}y\right)+y \Leftrightarrow 2x-1=y^2$. 而在 $\triangle GCD'$ 中，

$$y^2=x^2-(x-1)^2=2x-1.$$

9. 设 $EF=x$，$FG=y$，则 $\dfrac{3x}{4}+y+\dfrac{4x}{3}=5$，即

$$25x+12y=60.$$

$$xy=\frac{(25x)(12y)}{25\cdot 12}.$$

当 $25x=12y$，即 $x=\frac{6}{5}$ 时最大. 这时 $y=\frac{5}{2}$. 设内切圆半径为 r，则 $r_3=\frac{r}{2}=\frac{1}{2}$.

$$r_1=r\cdot\frac{x}{3}=\frac{2}{5},\qquad r_2=r\cdot\frac{x}{4}=\frac{3}{10},$$

所以
$$r_1^2+r_2^2=r_3^2.$$

10. 设$\odot O_1$切 CD 于 Q，则

$$PQ^2=\left(\frac{4}{2}+r_1\right)^2-\left(\frac{4}{2}-r_1\right)^2=8r_1.$$

在以 OO_1 为斜边，直角边长为 PQ 的直角三角形中，

$$(1+r_1)^2=(5-r_1)^2-8r_1,$$

从而 $r_1=\frac{6}{5}$.

同样，由 $(r_2-1)^2=(5-r_2)^2-12r_2$ 得 $r_2=\frac{6}{5}$.

11. 显然 $DG=DH$，$IG=IH$，所以四边形 $AEIH$ 有内切圆. 同理其他三个四边形也有内切圆. 设 $AH=a$，$CG=c$，则 $\frac{r_1}{a}=\frac{r-r_1}{r}$，所以 $r_1=\frac{ar}{a+r}$. 同理 $r_3=\frac{cr}{c+r}$.

而由 $\angle IAH+\angle ICG=\frac{1}{2}\times 180^\circ=90^\circ$，可知 $\triangle IAH\backsim\triangle IGC$，$r^2=ac$. 从而

$$\begin{aligned}r_1+r_3&=\frac{ar}{a+r}+\frac{cr}{c+r}\\&=\frac{ar}{a+r}+\frac{r^3}{r^2+ar}=r.\end{aligned}$$

同理 $r_2+r_4=r$.

12. $2\sqrt{CE \cdot AD}=CD$，所以

$$CE=1,\quad BE=3,\quad AE=5,$$

$$r_2=\frac{3+4-5}{2}=1.$$

设 $HG\cap BC=P$，则$\triangle PEG\cong\triangle AEB$.

$\odot O_1$ 平行于 AB 的切线距 AB 为 2，所以也与$\odot O_2$ 相切，是这两个圆的内公切线. 它与外公切线 BC 垂直，所以外公切线 PH 也与内公切线 EG 垂直，而且 $EG=EB=3$.

因此，$AG=AE-EG=5-3=2$，$r_3=\frac{2}{3}r_2=\frac{2}{3}$.

13. 设 $AA'=l$，则在$\triangle BC'C$ 中，由于$\angle BC'C=120°$，所以 C' 到内切圆的切线长是$\frac{r}{\sqrt{3}}$. 从而

$$l+(l-2\sqrt{3}r)-\frac{2r}{\sqrt{3}}=10. \qquad ①$$

又由余弦定理

$$l^2+(l-2\sqrt{3}r)^2+l(l-2\sqrt{3}r)=100. \qquad ②$$

改记 $2\sqrt{3}r=x$，则由①得

$$l=5+\frac{2}{3}x. \qquad ③$$

代入②得

$$\left(5+\frac{2}{3}x\right)^2+\left(5-\frac{1}{3}x\right)^2+\left(5+\frac{2}{3}x\right)\left(5-\frac{1}{3}x\right)=100,$$

即
$$\frac{1}{3}x^2+5x-25=0.$$

$$x=\frac{-15+5\sqrt{21}}{2}\quad（只取正值），$$

$$r=\frac{5(\sqrt{7}-\sqrt{3})}{4}.$$

14. 设切线构成四边形 $ABCD$，则 $\angle OAO_1=90°$，$\triangle ODO_1=90°$，O,A,O_1,D 四点共圆，所以 $\angle O_1OA=\angle O_1DA=\angle O_4DC$. 同理 $\angle OCO_4=90°$，$\angle O_4DC=\angle O_4OC$. 所以 $\triangle O_1OA\backsim\triangle O_4OC$，$\frac{O_1A}{O_4C}=\frac{OA}{OC}$. 同理 $\frac{O_2A}{O_3C}=\frac{OA}{OC}$.

易知 $\frac{r_1}{r_2}=\frac{O_1A}{O_2A}$，$\frac{r_3}{r_4}=\frac{O_3C}{O_4C}$，从而 $r_1r_3=r_2r_4$.

15. 设 $OP=p$. 由余弦定理，

$$\cos\angle OPO_1=\frac{p^2+r_1^2-(r-r_1)^2}{2pr_1},$$

$$\cos\angle OPO_3=\frac{p^2+r_3^2-(r-r_3)^2}{2pr_3}.$$

因为
$$\angle OPO_1-\angle OPO_3=180°,$$

所以
$$\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_3}=\frac{4r}{r^2-p^2}.$$

同理
$$\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_4}=\frac{4r}{r^2-p^2}.$$

16. 易知 P 为 AQ 中点. 过 P 作 AQ 的垂线交 CD 于 R，则 P,Q,C,R 共圆，$\angle PQR=\angle PCR=60°$. 从而这时 $\triangle AQR$ 是正三角形.

设 M,N 分别为 AB,CD 中点，则 $PN=5\sqrt{3}$，$PM=10-5\sqrt{3}$，$BQ=2(10-5\sqrt{3})$，$CQ=10\sqrt{3}-10$. 又 $RD=BQ$，所以 $CR=CQ=10\sqrt{3}-10$，$\angle TRC=45°$. $\angle RAD=45°+60°-90°=15°$，$\angle PDA=30°$，$\angle TCR=60°$.

已知三角形的边 a 及角 B,C，则内切圆

$$r=\frac{bc\sin(B+C)}{a+b+c}$$

$$=\frac{a\sin B\sin C}{\sin(B+C)+\sin B+\sin C}.$$

从而

$$r_1=\frac{10\sin15°\sin30°}{\sin30°+\sin15°+\sin135°}$$

$$=\frac{5(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}},$$

$$r_2=\frac{10(\sqrt{3}-1)\sin60°\sin45°}{\sin60°+\sin45°+\sin75°}$$

$$=\frac{10(\sqrt{6}-\sqrt{2})}{2+\sqrt{6}+\sqrt{2}}=2r_1.$$

17. 设过 A,B 并与$\odot O_3$相切的圆半径为 r. 易知 $AB=2\sqrt{r_1r_2}$. 设 $a=\sqrt{r_1r_2}$,则

$$(\sqrt{r^2-a^2}+r_3)^2+(a-2\sqrt{r_2r_3})^2=(r-r_3)^2,$$

所以
$$\sqrt{r^2-a^2}+r+2r_2=2a\sqrt{\frac{r_2}{r_3}}.$$

而
$$\sqrt{r_1r_2}=\sqrt{r_1r_3}+\sqrt{r_2r_3},$$

所以
$$2a\sqrt{\frac{r_2}{r_3}}=2a\sqrt{r_2}\left(\frac{1}{\sqrt{r_1}}+\frac{1}{\sqrt{r_2}}\right)$$

$$=2r_2+2\sqrt{r_1r_2}$$

$$=2r_2+2a.$$

于是
$$\sqrt{r^2-a^2}=2a-r.$$

解出 $r=\frac{5}{4}a$.

18. 设$\angle O_3OO_2=\alpha$,$\angle O_2OO_1=\beta$,$\angle O_1OO_6=\gamma$,则

$$\alpha + \beta + \gamma = 180^\circ,$$

从而 $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$

由余弦定理，

$$\cos\alpha = \frac{(r-b)^2 + (r-c)^2 - (b+c)^2}{2(r-b)(r-c)},$$

等等. 代入上式并化简得

$$r^4 - 2(a+b+c)r^3 + (a+b+c)^2r^2 + 16abcr - 16abc(a+b+c) = 0,$$

即

$$[r-(a+b+c)][r^3-(a+b+c)r^2+16abc] = 0.$$

所以 $r = a+b+c$，从而 $OO_3 = O_1O_2$，$OO_1 = O_2O_3$，四边形 $OO_1O_2O_3$ 是平行四边形，$O_1O_2 \parallel OO_3$.

19. 设$\odot O_1$ 分别切 AB，AC、BD、CE 于 E'，D'，M，N，则

$$\begin{aligned} AB - BF &= AE' + FM \\ &= AD' + FN \\ &= AC - CF, \end{aligned}$$

所以 $BC + AC - AB = BC + CF - BF$. 即$\odot O_2$ 与 BC 相切的点 L 也是$\triangle ABC$ 的内切圆与 BC 的切点.

设 $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$，$\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r. 又设 $\angle ACB = 2\gamma$，$\angle BAC = 2\alpha$，$\angle FCA = 2\phi$，则

$$\tan\gamma = \frac{r}{s-c},$$

$$\tan\phi = \frac{r_1}{b - r_1\cot\alpha} = \frac{r_1\tan\alpha}{b\tan\alpha - r_1} = \frac{r_1 r}{br - r_1(s-a)}.$$

$$r_2=(s-c)\tan(\gamma-\phi)=(s-c)\cdot\frac{\tan\gamma-\tan\phi}{1+\tan\gamma\tan\phi}$$

$$=(s-c)\left[\frac{r}{s-c}-\frac{r_1r}{br-r_1(s-a)}\right]\Big/$$

$$\left[1+\frac{r}{s-c}\cdot\frac{r_1r}{br-r_1(s-a)}\right]$$

$$=r(s-c)[br-r_1(s-a)-r_1(s-c)]/$$

$$\{r_1r^2+(s-c)[br-r_1(s-a)]\}$$

$$=rb(s-c)(r-r_1)/$$

$$\left[br(s-c)-r_1\cdot\frac{(s-a)(s-c)}{s}b\right]$$

$$=\frac{rs(r-r_1)}{rs-r_1(s-a)}$$

20. $r_1+r_2=5, r_2+r_3=4, r_3+r_1=3$. 所以,$r_1=2, r_2=3$, $r_3=1$. 由第 93 节笛卡儿的定理,

$$r=\frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)}=6.$$

70. 五圆定理与四圆定理

设 P,Q 为$\triangle ABC$ 的边 BC 上的顺次两点.

1986 年,H. Demir 发现如下的五圆定理:

如果 $\triangle ABP$, $\triangle APQ$, $\triangle AQC$ 的内切圆都相等,那么 $\triangle ABQ$,$\triangle APC$ 的内切圆也相等(图 136).

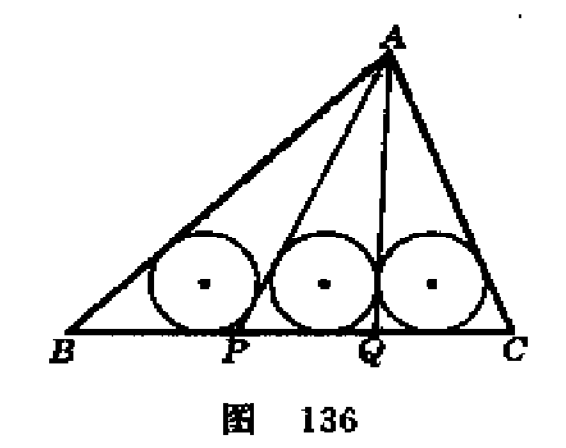


图 136

1990 年，J. B. Tabov 将五圆定理改进为四圆定理：

如果$\triangle ABP$，$\triangle AQC$ 的内切圆相等，那么$\triangle ABQ$，$\triangle APC$ 的内切圆也相等（图 137）.

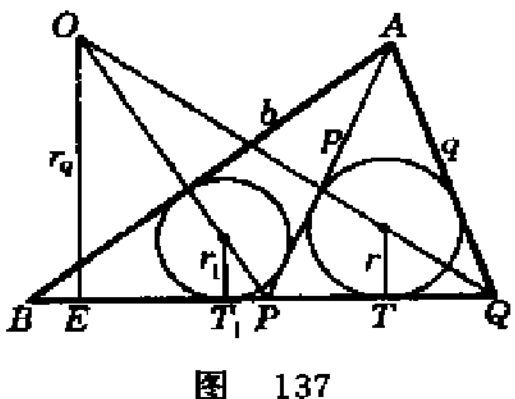


图 137

证明如下：设 $AQ=q$，$AP=p$，$AB=b$，$PQ=x$，$BP=y$，$\triangle ABP$ 的内切圆半径为 r_1，$\triangle APQ$ 的内切圆半径为 r.

设$\angle AQP$ 的平分线与$\angle APB$ 的平分线相交于 O，即 O 为$\triangle APQ$ 的旁心. 又设这旁切圆的半径为 r_q，则有

$$\frac{r}{r_q}=\frac{QT}{QE}=\frac{q+x-p}{q+x+p},$$

$$\frac{r_1}{r_q}=\frac{PT_1}{PE}=\frac{p+y-b}{q+p-x}.$$

所以 $$\frac{r}{r_1}=\frac{(q+x-p)(q+p-x)}{(q+x+p)(p+y-b)}.$$

同理，设$\triangle AQC$ 的内切圆半径为 r_2，$QC=z$，$AC=c$，则有

$$\frac{r}{r_2}=\frac{(p+x-q)(q+p-x)}{(q+x+p)(q+z-c)}.$$

所以 $r=r_2$ 等价于

$$(x+q-p)(z+q-c)=(y+p-b)(x+p-q).$$

设$\triangle ABQ$，$\triangle APC$ 的内切圆半径分别为 ρ_1，ρ_2，则同样有 $\rho_1=\rho_2$ 等价于

$$(x+q-p)(p+x+z-c)=(x+p-q)(q+x+y-b).$$

因为

$$(x+q-p)(p+x+z-c)$$
$$=(x+q-p)(z+q-c)+(x+q-p)(x+p-q),$$
$$(x+p-q)(q+x+y-b)$$

$$=(x+p-q)(y+p-b)+(x+p-q)(q+x-p),$$

所以 $r_1=r_2$ 与 $\rho_1=\rho_2$ 等价.

71. 俄罗斯杀手

我国数学家吴文俊、张景中、杨路等研究机器证明，取得不少结果. 很多几何定理可以通过计算机获得证明.

有一次，俄罗斯提出一道几何题，他们认为用机器难以证明，杨路教授称之为"俄罗斯杀手".

题目如下：

设凸四边形 $ABCD$ 的面积为 S，内角分别为 $2\alpha,2\beta,2\gamma,2\delta$，边长分别为 l,m,n,k. 又记

$$p=\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma+\tan\delta,$$

$$q=\cot\alpha+\cot\beta+\cot\gamma+\cot\delta,$$

$$t=\frac{l-m+n-k}{2},\quad T=\frac{l+m+n+k}{2},$$

则

$$S=\frac{T^2}{q}-\frac{t^2}{p}. \qquad ①$$

这题当然也能用机器证明. 不过，我们也希望有一个纯几何的证明.

证明的困难在于给出的"数据"太多，反而难于措手.

先考虑简单的情况：如果四边形有内切圆，那么 $t=0$. 如图 138，设内切圆半径为 r，则

$$l=r(\cot\alpha+\cot\beta),$$

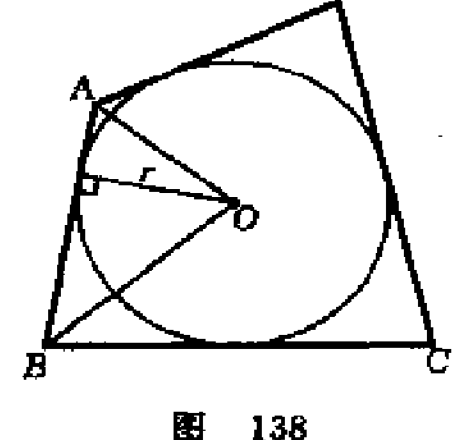


图 138

从而 $$T=\frac{1}{2}(l+m+n+k)=rq,$$

$$S=rT=\frac{T^2}{q}. \qquad ②$$

即①对于圆外切四边形成立.

对于一般情况,如图 139,我们先作一个有内切圆的四边形,各边分别与四边形 $ABCD$ 的边平行(或重合). 具体作时,可以利用原四边形的两条边 BA,BC. 即先作一个圆与 BA,BC 相切(圆心取在$\angle ABC$ 的角平分线上),再作两条切线分别与 CD,DA 平行.

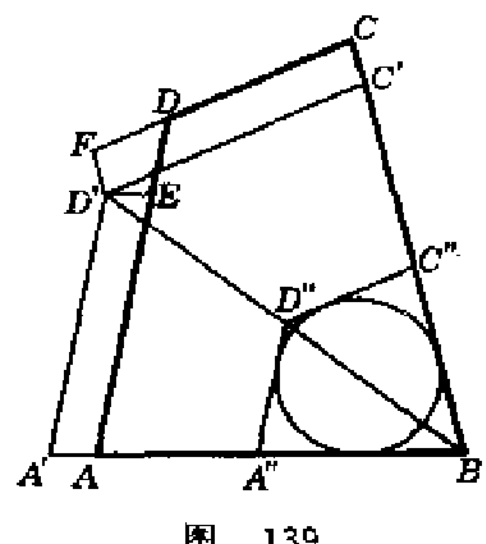


图 139

将所作的四边形 $A''BC''D''$放大,使它的周长变为 T. 设这个放大的四边形为 $A'BC'D'$.

过 D'作 CD,DA 的平行线,分别交 DA,CD 于 E,F.

由上面所得的②,四边形 $A'BC'D'$的面积是$\frac{T'^2}{q}$. 因此,我们只需证明

四边形 $A'BC'D'$的面积减去 S,差是$\frac{t^2}{p}$.

容易看出这差是

$$S_{A'AED'}+S_{D'EDF}-S_{D'C'CF}.$$

如果能够证明

$$S_{A'AED'}=S_{D'C'CF}, \qquad ③$$

$$S_{D'EDF}=\frac{t^2}{p}, \qquad ④$$

那么①就成立了.

先来证④. 因为

$$
\begin{aligned}
&D'E + DF - DE - D'F \\
&= (A'B - AB) + (C'D' - CD) - (AD - A'D') \\
&\quad - (BC - BC') \\
&= (A'B + BC' + C'D' + A'D') \\
&\quad - (AB + BC + CD + AD) \\
&= T - T = 0,
\end{aligned}
$$

所以四边形 $D'EDF$ 是圆外切四边形. 它的内角分别与 2α, 2β, 2γ, 2δ 互补, 周长是

$$
\begin{aligned}
&D'E + DF + DE + D'F \\
&= (A'B - AB) + (C'D' - CD) + (AD - A'D') \\
&\quad + (BC - BC') \\
&= (AD + BC - AB - CD) \\
&\quad + (A'B + C'D' - A'D' - BC') \\
&= AD + BC - AB - CD \\
&= -2t.
\end{aligned}
$$

于是由②, ④式成立.

再来证③. 两个四边形都是平行四边形.

$$S_{A'AED'} = A'D' \times D'E \times \sin 2\alpha.$$

由一开始对圆外切四边形的讨论,

$$A'D' = \frac{T}{q}(\cot\alpha + \cot\delta),$$

$$D'E = \frac{t}{p}(\tan\beta + \tan\alpha).$$

所以

$$
\begin{aligned}
S_{A'AED'} &= \frac{Tt}{pq}(\cot\alpha + \cot\delta)(\tan\beta + \tan\alpha)\sin 2\alpha \\
&= \frac{2Tt}{pq} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)\sin(\alpha + \delta)}{\sin\delta\cos\beta}.
\end{aligned}
$$

同理

$$S_{D'C'CF}=\frac{2Tt}{pq}\cdot\frac{\sin(\gamma+\beta)\sin(\gamma+\delta)}{\sin\delta\cos\beta}.$$

由于 $\alpha+\beta=180^\circ-(\gamma+\delta)$，$\alpha+\delta=180^\circ-(\gamma+\beta)$，所以

$$S_{A'ABD'}=S_{D'C'CF}.$$

至此，俄罗斯杀手已被我们擒获.

（七）逍遥自在

72. 一道波兰竞赛题

爱解题的人，觉得解题是一种愉快，极大的愉快.

自本节至80节，介绍的都是国外的竞赛题.

在锐角三角形 ABC 中，$\angle ACB=2\angle ABC$. 点 D 是边 BC 上一点，使得 $2\angle BAD=\angle ABC$. 证明：

$$\frac{1}{BD}=\frac{1}{AB}+\frac{1}{AC}. \qquad ①$$

这是1999年～2000年波兰数学奥林匹克的试题.

由已知条件，将 $\angle BAD$，$\angle ABC$ 两倍，便可产生有两个角相等的等腰三角形. 因此，应当在 DC 上取 E，使 $\angle EAD=\angle BAD$（图140）. 辅助线添好，问题也就不难解决了.

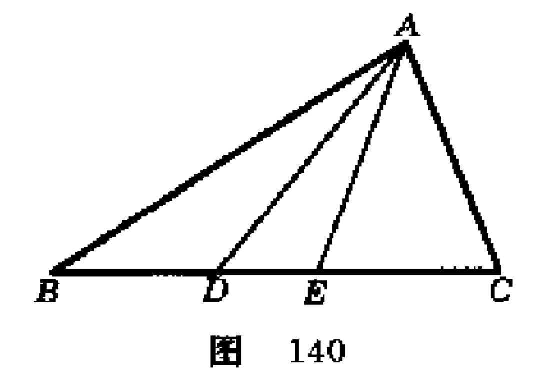


图 140

设 $\angle BAD=\alpha$，则 $\angle BAE=2\alpha=\angle ABC$. 所以，$AE=BE$.

又 $\angle AEC=\angle BAE+\angle ABC=2\angle ABC=\angle ACB$，所以 $AE=AC$.

在 $\triangle ABE$ 中，因为 AD 是角平分线，所以

$$\frac{BD}{DE}=\frac{AB}{AE}, \qquad ②$$

即

$$\frac{BD}{AC-BD}=\frac{AB}{AC}.\tag{③}$$

③中只有三个在①中出现的量：BD,AB,AC. 将③变形即得到①.

73. 直角三角形内一点

点 X 是 $\mathrm{Rt}\triangle ABC$（$\angle C=90°$）内部或边界上一点. 点 P，Q，R 分别是 X 在边 BC，CA，AB 上的垂足. 证明：

$$AR\cdot RB=BP\cdot PC+AQ\cdot QC.\tag{①}$$

的充要条件是点 X 在边 AB 上.

我们先证较容易的充分性.

如图 141，点 $X=R$. 要证①式成立.

易知 $\frac{BP}{RB}=\frac{PC}{AR}=\sin A$，$\frac{AQ}{AR}=\frac{QC}{RB}=\cos A$，所以

$$\frac{BP\cdot PC}{AR\cdot RB}+\frac{AQ\cdot QC}{AR\cdot RB}=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1,$$

即①成立.

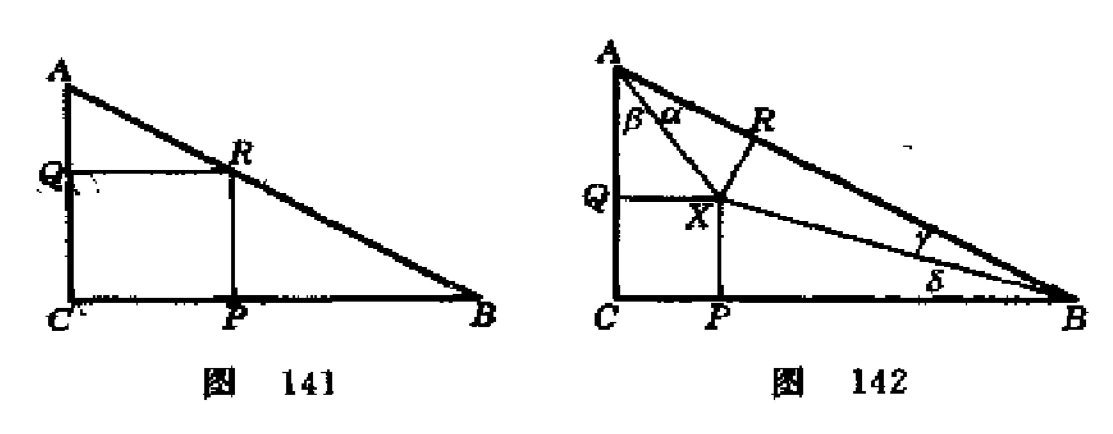


图 141　　　　图 142

再证必要性. 如图 142，设①成立.

沿着前面的思路，仍然利用三角函数，我们有

$$\frac{BP}{RB}=\frac{BX\cos\delta}{BX\cos\gamma}=\frac{\cos\delta}{\cos\gamma},\quad \frac{PC}{AR}=\frac{\sin\beta}{\cos\alpha},$$

$$\frac{AQ}{AR}=\frac{\cos\beta}{\cos\alpha},\ \frac{QC}{RB}=\frac{\sin\delta}{\cos\gamma},$$

所以

$$\begin{aligned}&\frac{BP\cdot PC}{AR\cdot RB}+\frac{AQ\cdot QC}{AR\cdot RB}\\&=\frac{\cos\delta\sin\beta+\cos\beta\sin\delta}{\cos\alpha\cos\gamma}\\&=\frac{\sin(\beta+\delta)}{\cos\alpha\cos\gamma}=\frac{\cos(\alpha+\gamma)}{\cos\alpha\cos\gamma}\\&=\frac{\cos\alpha\cos\gamma-\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}=1-\frac{\sin\alpha\sin\gamma}{\cos\alpha\cos\gamma}.\end{aligned}$$

从而 α 或 γ 为 0，即 $X=R$.

不难看出，充分性的证明可以并入必要性的证明中.

另一种解法是利用勾股定理：

$$(AR+RB)^2=(AQ+QC)^2+(BP+PC)^2,$$

即

$$\begin{aligned}&AR^2+RB^2+2AR\cdot RB\\&=AQ^2+PC^2+QC^2+BP^2+2(AQ\cdot QC+BP\cdot PC)\\&=AX^2+XB^2+2(AQ\cdot QC+BP\cdot PC).\\&\geqslant AR^2+RB^2+2(AQ\cdot QC+BP\cdot PC).\end{aligned}$$

于是，当且仅当 X 在 AB 上(即 $AX=AR$，$XB=RB$)时，①式成立.

本题也是 1999 年～2000 年的波兰数学奥林匹克试题.

74. 平　方　和

A，B，C 三点不共线. 证明平面 ABC 上存在一个唯一的点 X，满足

$$XA^2+XB^2+AB^2=XB^2+XC^2+BC^2$$
$$=XC^2+XA^2+CA^2.$$

平方和或平方差使人想到垂直关系. 设三条高为 AD, BE, CF, 垂心为 H, 则

$$HA^2-HC^2=AB^2-BC^2=AE^2-EC^2,$$
$$HB^2-HA^2=BC^2-CA^2=BF^2-AF^2.$$

这与 X 所应满足的等式已很接近，只差一负号.

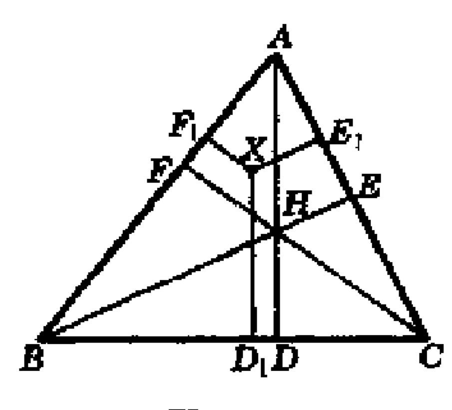


图 143

在 AB, AC 上分别取 F_1, E_1, 使

$$AF_1=BF,\ AE_1=CE.$$

过 E_1, F_1 分别作 AC, AB 的垂线，相交于 X(图 143), 则

$$XA^2-XC^2=AE_1^2-CE_1^2=EC^2-AE^2=BC^2-AB^2,$$
$$XB^2-XA^2=BF_1^2-AF_1^2=AF^2-BF^2=CA^2-BC^2.$$

即点 X 满足要求.

另一方面，满足要求的点 X 使

$$XA^2-XC^2=BC^2-AB^2=EC^2-AE^2=AE_1^2-CE_1^2,$$

所以 X 在 AC 的过 E_1 点的垂线上. 同理 X 在 AB 的过 F_1 点的垂线上. 所以 X 是这两条垂线的交点，它是唯一的.

注：在 BC 上取 D_1, 使 $BD_1=CD$, 则 X 也在 BC 的过 D_1 点的垂线上. 在近世几何中，点 X 称为$\triangle ABC$ 的类似垂心.

75. 六 点 共 圆

已知锐角三角形 ABC, 在边 BC 上取点 A_1, A_2 (A_2 在 A_1 与 C 之间), 边 AC 上取点 B_1, B_2 (B_2 在 B_1 与 A 之间), 边 AB

上取点 C_1, C_2(C_2 在 C_1 与 B 之间),使得

$$\angle AA_1A_2=\angle AA_2A_1=\angle BB_1B_2=\angle BB_2B_1$$
$$=\angle CC_1C_2=\angle CC_2C_1.$$

直线 AA_1, BB_1, CC_1 围成一个三角形,AA_2, BB_2, CC_2 围成另一个三角形.证明这两个三角形的六个顶点在同一个圆上.

本题宜先作一个较为准确的图.在作图过程中可以发现一些性质,其中有些对解决本题有帮助.

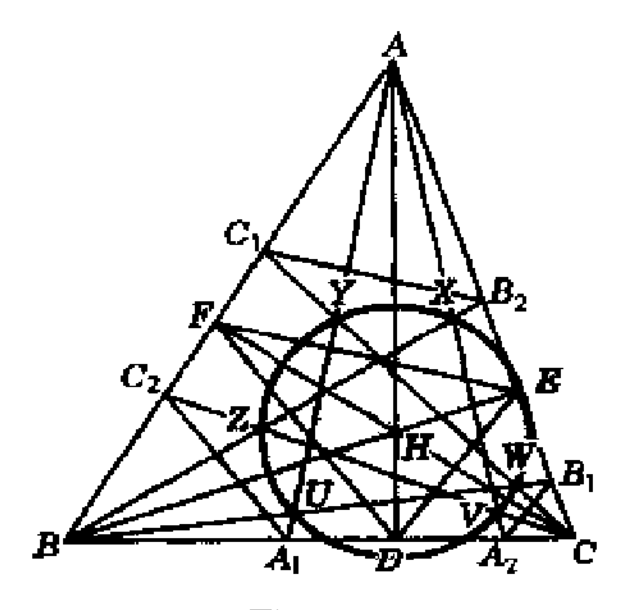


图 144

A_1 可以任取(当然应在高 AD 左侧),A_2 应满足 $AA_2=AA_1$,即 A_1, A_2 关于高 AD 对称.A_2, B_1, A, B 四点共圆,我们称 A_2B_1(关于 CA, CB)与 AB 逆平行.熟知高 BE, AD 的垂足 E, D 的连线 DE 也与 AB 逆平行,从而 $A_2B_1 /\!/ DE$.于是过 A_2 作 DE 的平行线就可得到 B_1.再关于 BE 对称,由 B_1 得到 B_2.同样可作出 C_1, C_2(图 144).

作图完成后,要证图中 X, Y, Z, U, V, W 六点共圆.证六点共圆的办法通常是找出一点与这六点距离相等.这一点即圆心,它应与六点有关而且位置较为特殊.从图中以及上述作图可以猜想这一点就是$\triangle ABC$ 的垂心 H.

事实上,易知(尽量利用四点共圆)

$$AX\cdot AA_2=AB_2\cdot AC=AC_1\cdot AB=AY\cdot AA_1,$$

从而 $AX=AY$,即 X, Y 关于等腰三角形 AA_1A_2 的高 AD 对称.所以 $HX=HY$.

同理，$HY=HZ=HU=HV=HW=HX$. 所以 X,Y,Z，U,V,W 都在以 H 为圆心的同一个圆上.

又解：$\angle A_1AD=90°-\angle AA_1A_2=90°-\angle BB_1B_2=\angle EBB_1$，所以 H,A,B,U 四点共圆. 同理，H,A,C,V 四点共圆. 并且，两圆的公共弦 AH 在两圆中所对圆周角 $\angle HBA=\angle HCA$，所以这两个圆相等. 弦 HU 所对圆周角为 $\angle HAU$，弦 HV 所对圆周角为 $\angle HAV$，$\angle HAU=\angle HAV$，所以 $HU=HV$. 同理可证 $HV=HW=HX=HY=HZ$.

三解：在又解中得到 H，A，B，U 四点共圆. 由于 $\angle BHA=180°-\angle C$，所以这个圆的直径 $\frac{AB}{\sin\angle BHA}=\frac{AB}{\sin C}$，即与 $\triangle ABC$ 的外接圆一样大.

设 $\triangle ABC$ 的半径为 R，$\angle AA_1A_2=\alpha$，则

$$\angle A_1AH=90°-\alpha,$$

$$HU=2R\sin(90°-\alpha)=R\cos\alpha.$$

同理，H 到 V，W，X，Y，Z 的距离也都是 $R\cos\alpha$，所以 U，V，W，X，Y，Z 六点在以 H 为圆心，$R\cos\alpha$ 为半径的圆上.

76. 三线共点与三点共线

已知 $\triangle ABC$. 一圆过 B,C，再分别交边 AB,AC 于 C'，B'；而 H,H' 分别为 $\triangle ABC$、$\triangle AB'C'$ 的垂心. 证明 BB',CC'，HH' 共点.

如图 145，设 $\triangle ABC$ 的高为 BE，CF，$\triangle AB'C'$ 的高为 $B'E'$，$C'F'$. 又设 $B'C'$，BC 相交于 G；$H'B'$，HB 相交于 I；$H'C'$，HC 相交于 J.

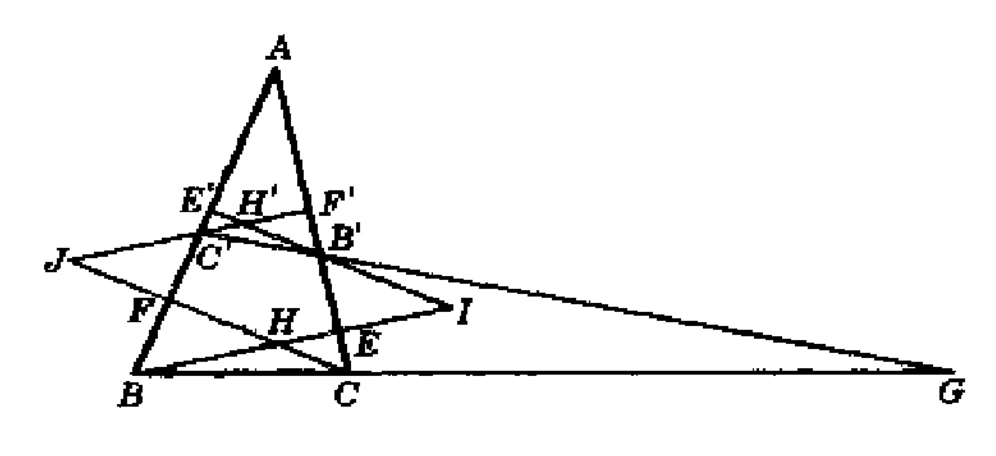


图　145

由笛沙格定理，要证$\triangle HBC$与$\triangle H'B'C'$的对应顶点的连线BB'，CC'，HH'共点，只需证明对应边的交点I，J，G共线.

因为B，C，B'，C'共圆，所以

$$GC \cdot GB = GB' \cdot GC'. \qquad ①$$

熟知B，C，E，F共圆；B'，C'，E'，F'共圆. ①表明G对于这两个圆的幂相等，所以G在这两个圆的根轴l上.

因为$\angle BEB' + \angle B'E'B = 90° + 90° = 180°$，所以$B$，$E$，$B'$，$E'$四点共圆，从而$IE \cdot IB = IB' \cdot IE'$. I也在上一段所说的两个圆的根轴l上.

同理J也在l上. 因此I，J，G共线，BB'，CC'，HH'共点.

77. 比

如图146，已知圆内接四边形$ABCD$，E，F分别在边AB，CD上变动，满足$AE : EB = CF : FD$. P在线段EF上，使得$PE : PF = AB : CD$.

求证：$S_{\triangle APD} : S_{\triangle BPC}$不依赖于$E$，$F$的选择.

本题有很多比.我们有一个常用的、关于定比分点的引理:

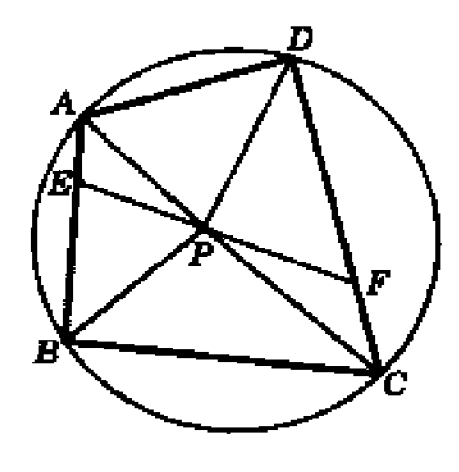


图 146

设 P 分线段 EF 为 $m:n$,E,F 到直线 l 的距离分别为 d_E,d_F,则 P 到 l 的距离

$$d_P=\frac{nd_E+md_F}{m+n}. \qquad ①$$

引理很容易证明,而且不少书(包括教科书)都有,所以我们不加证明,留给读者自行验证.但要注意①的分子是 nd_E+md_F,而不是 md_E+nd_F.

设 $AE:EB=CF:FD=\lambda$,则取 AD 作为直线 l,我们有

$$P\text{ 到 }AD\text{ 的距离}=\frac{CD\times d_E+AB\times d_F}{AB+CD}$$

$$=\frac{CD\times AE\sin A+AB\times DF\sin D}{AB+CD}$$

$$=\frac{CD\times AB\times\frac{1}{1+\lambda}\sin A+AB\times CD\times\frac{\lambda}{1+\lambda}\sin D}{AB+CD}$$

$$=\frac{AB\times CD}{(1+\lambda)(AB+CD)}(\sin A+\lambda\sin D).$$

同理,

$$P\text{ 到 }BC\text{ 的距离}$$

$$=\frac{AB\times CD}{(1+\lambda)(AB+CD)}(\lambda\sin B+\sin C)$$

$$=\frac{AB\times CD}{(1+\lambda)(AB+CD)}(\lambda\sin D+\sin A).$$

所以 P 到 AD 的距离与 P 到 BC 的距离相等,

$$\frac{S_{\triangle APD}}{S_{\triangle BPC}}=\frac{AD}{BC},$$

与 E,F 的选择无关.

78. 何时 $OH=2R$?

$\triangle ABC$ 中，H 为垂心，O 为外心，R 为外接圆半径. D,E, F 分别为 A,B,C 关于对边的对称点.

求证：当且仅当 $OH=2R$ 时，D,E,F 三点共线.

如图 147，过 A，B，C 分别作对边的平行线，组成 $\triangle A'B'C'$. 在第 23 节已经说过 $\triangle A'B'C'$ 的边长分别是 $\triangle ABC$ 对应边长的 2 倍. $\triangle A'B'C'$ 的外心就是 $\triangle ABC$ 的垂心 H，而且 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆半径是 $2R$.

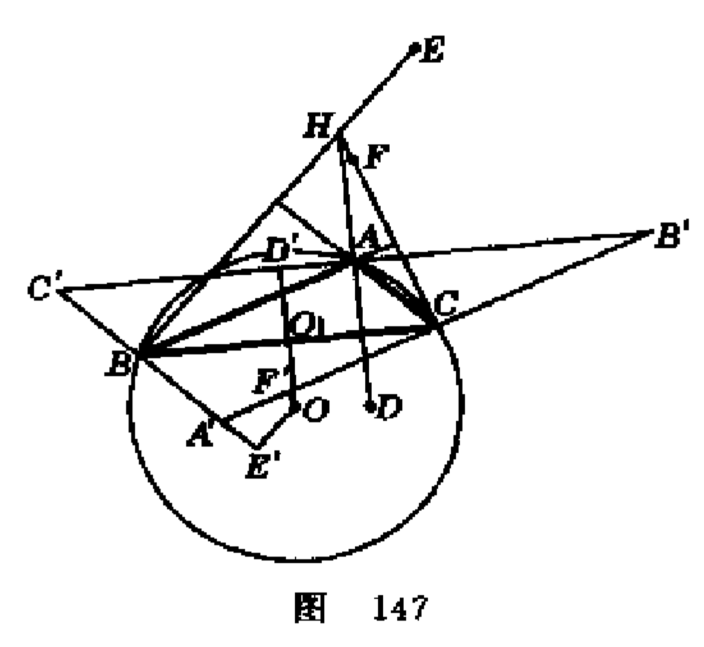


图 147

于是当且仅当 $OH=2R$ 时，O 在 $\triangle A'B'C'$ 的外接圆上.

设 O 到 $\triangle A'B'C'$ 的三边所引垂线的垂足分别为 D'，E'，F'，则由西摩松定理：

当且仅当 $OH=2R$ 时，D'，E'，F' 共线.

注意 $OD' \parallel HD$，并且（O_1 为 OD' 与 BC 的交点）

$$OD'=OO_1+O_1D'=\frac{1}{2}HA+\frac{1}{2}AD=\frac{1}{2}HD,$$

等等，所以将 O 平移到 H，然后绕 H 旋转 $180°$，再放大至 2 倍，则 D'，E'，F' 分别与 D，E，F 重合。

因此当且仅当 $OH=2R$ 时，D，E，F 三点共线。

79. 直线与圆相切

如图 148，两个圆 Γ_1，Γ_2 在圆 Γ 内，分别与圆 Γ 内切于两个不同的点 M，N。并且 Γ_1 过 Γ_2 的圆心。过 Γ_1，Γ_2 的两个交点的直线交 Γ 于 A，B。直线 MA，MB 分别与 Γ_1 相交于 C，D。

求证：CD 与 Γ_2 相切。

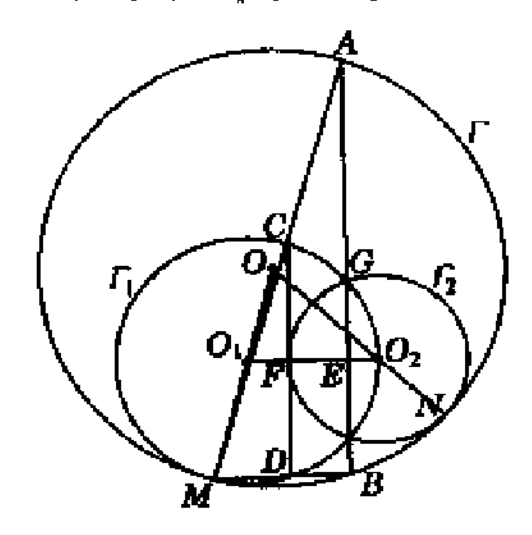


图 148

首先证明 $CD/\!/AB$。最简单的证法是以 M 为位似中心，将 Γ_1 变为 Γ（因为这两圆相切，所以圆心 O_1，O 与 M 共线）。这时 CD 变为 AB。所以 $CD/\!/AB$。（不熟悉位似变换的人也可以过 M 作 Γ_1 与 Γ 的公切线。利用角的相等证明两线平行。）

设 Γ_2 的圆心为 O_2，则 $O_1O_2\perp AB$。因而 $O_1O_2\perp CD$。设 O_1O_2 与 CD 相交于 F，与 AB 相交于 E。只需证 $O_2F=r_2$，这里 r_2 是 r_2 的半径。

设 Γ，Γ_1 的半径分别为 R，r_1。因为 Γ_1 过 O_2，只需证 $O_1F=r_1-r_2$。而由上而所说的位似，只需证 O 到 AB 的距离是：

$$\frac{R}{r_1}(r_1-r_2)=R-\frac{Rr_2}{r_1}\,. \qquad ①$$

设 G 为 Γ_1，Γ_2 的一个交点，因为 $O_1G=r_1$，$O_2G=r_2$，所以

$$O_1E^2-O_2E^2=r_1^2-r_2^2.$$

而

$$O_1E^2-O_2E^2=r_1(O_1E-O_2E)=r_1(r_1-2\times O_2E),$$

所以

$$r_1-2\times O_2E=\frac{r_1^2-r_2^2}{r_1}. \qquad ②$$

同样，由$\triangle OO_1O_2$可得

$$r_1-2\times O_2H=\frac{(R-r_1)^2-(R-r_2)^2}{r_1}, \qquad ③$$

其中H是O在O_1O_2上的射影.

②减去③得

$$2(O_2H-O_2E)=\frac{2R}{r_1}(r_1-r_2),$$

即①成立. 证毕.

80. 圆内接四边形对边之差

如图 149，在圆内接四边形 $ABCD$ 中，证明：

$$|AB-CD|+|AD-BC|\geqslant|AC-BD|. \qquad ①$$

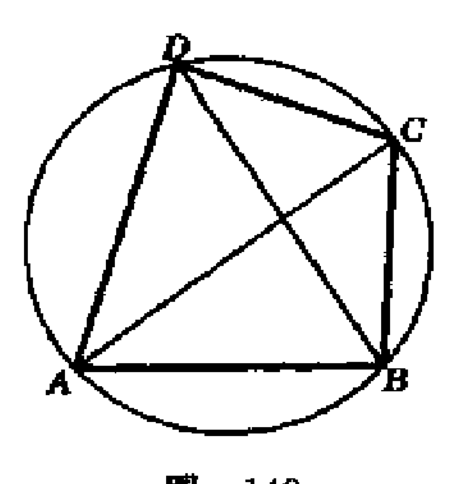


图 149

本题必须有"圆内接四边形"这一条件，否则结论不成立. 例如平行四边形 $ABCD$ 中，对边相等，所以①式左边为 0. 只要对角线不等（$ABCD$ 不是矩形），①就不成立.

上面的反例，实际上也引出我们的证法：圆内接四边形，如果有两条边平行，那么它的对角线必须相

等.因此,可以过 A 作 BC 的平行弦 AD',产生一个等腰梯形(图 150).然后再考虑

$$AD'-BC(<AD-BC),\ CD'-CD(=AB-CD)$$

的和与

$$BD'-BD(=AC-BD)$$

的大小.

不妨设 B,C 在弦 DD' 的中垂线的同侧,我们证明更强的结论:

$$CD'-CD>BD'-BD. \quad ①$$

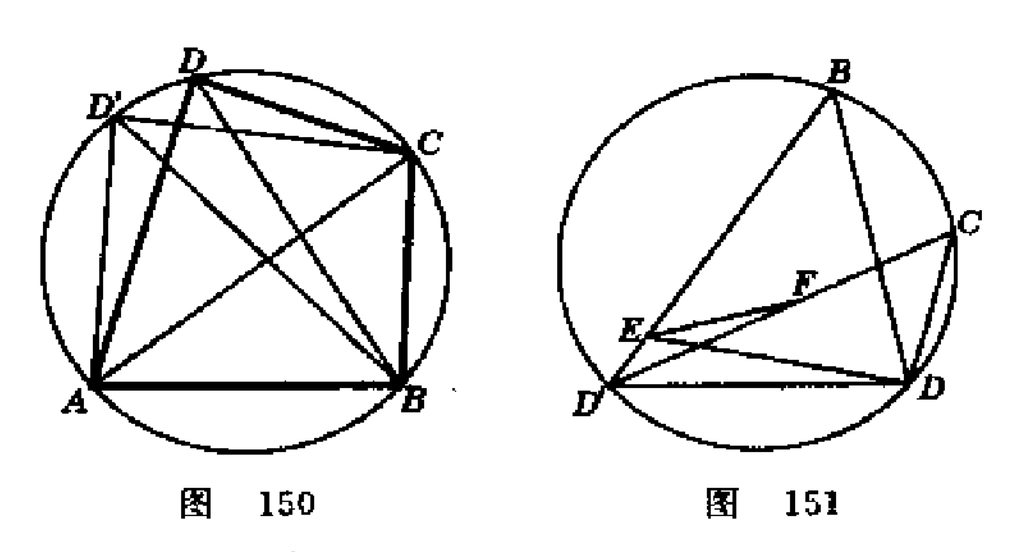


图 150　　　图 151

为了看得清楚一些,我们重画一个图(图 151),使与①有关的线段画得长一些.

在 BD' 上取 E,使 $BE=BD$.在 CD' 上取 F,使 $CF=CD$.因为

$$\angle D'EF>\angle D'ED=90°+\frac{1}{2}\angle EBD>90°,$$

所以

$$D'F>D'E,$$

即①成立.

两点补充:

1. 在上面的证明中，我们（不失一般性）设 $AB>CD$，$AD>BC$，$\overset{\frown}{AD}>\overset{\frown}{AB}$. 若$\overset{\frown}{AD}$是劣弧，则在$\overset{\frown}{AD}$上取 D'，使$\overset{\frown}{CD'}=\overset{\frown}{AB}$（即图 150 中作 $AD'\parallel BC$）. 若$\overset{\frown}{AD}$是优弧，则改在$\overset{\frown}{AB}$上取 B'，使$\overset{\frown}{AB'}=\overset{\frown}{DC}$（即作 $CB'\parallel AD$），证明基本相同（字母略作更动）.

2. 图 151 中，以 D,D' 为焦点的各双曲线，逐步“离开”DD' 的中垂线. 过 B 的双曲线，夹在中垂线与过 A 的双曲线（或过 C 的双曲线）之间，因而

$$|BD'-BD|<\max(|CD'-CD|,\ |AD'-AD|).$$

注：本题是 1999 年美国数学奥林匹克试题.

81. 等角共轭点

M,N 两点在$\triangle ABC$ 内，使

$$\angle MAB=\angle NAC,\ \angle MBA=\angle NBC. \quad ①$$

证明：

$$\frac{AM\cdot AN}{AB\cdot AC}+\frac{BM\cdot BN}{BA\cdot BC}+\frac{CM\cdot CN}{CA\cdot CB}=1. \quad ②$$

满足①式的点 M,N 称为$\triangle ABC$ 的等角共轭点. 对于这样一对点 M,N，必有

$$\angle MCB=\angle NCA. \quad ③$$

但我们并不假定③已经成立. 相反地，在我们解题的过程中将顺便证明③式成立.

我们利用对称.

设 M 关于 AB,BC,CA 的对称点分别为 M_1,M_2,M_3. 连接 $AM_1,BM_1,BM_2,CM_2,CM_3,AM_3,NM_1,NM_2,NM_3$（图 152）.

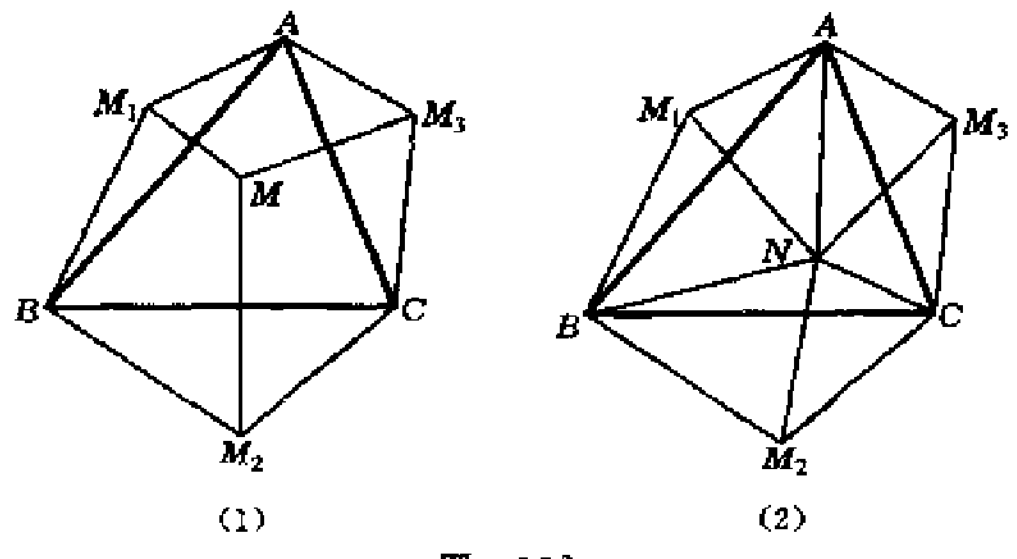


图 152

$\angle NAM_3 = \angle NAC + \angle CAM_3 = \angle MAB + \angle MAC = \angle BAC$. 同理$\angle NAM_1 = \angle BAC = \angle NAM_3$. 又 $AM_1 = AM = AM_3$，所以$\triangle NAM_1 \cong \triangle NAM_3$，$NM_3 = NM_1$.

同理$\triangle NBM_1 \cong \triangle NBM_2$，$NM_1 = NM_2$. 所以 $NM_2 = NM_3$.

又 $CM_2 = CM = CM_3$，所以$\triangle NCM_2 \cong \triangle NCM_3$. $\angle M_2CN = \angle M_3CN = \frac{1}{2}\angle M_2CM_3 = \angle BCM + MCA = \angle BCA$. 从而$\angle BCN = \angle M_2CN - \angle M_2CB = \angle BCA - \angle BCM = \angle MCA$，即③成立.

又 $S_{AM_1BM_2CM_3} = 2S_{\triangle ABC}$，即

$$\frac{AM_1 \times AN \times \sin\angle BAC}{2S_{\triangle ABC}} + \frac{BM_1 \times BN \times \sin\angle ABC}{2S_{\triangle ABC}} + \frac{CM_2 \times CN \times \sin\angle ACB}{2S_{\triangle ABC}} = 1.$$

由于 $2S_{\triangle ABC} = AB \times AC \times \sin\angle BAC = BA \times BC \times \sin\angle ABC = CA \times CB \times \sin\angle BCA$，所以上式导出②.

通常③用塞瓦定理来证明. 这里的证法似未在其他地方

见过.

82. 凸 六 边 形

设凸六边形 $ABCDEF$ 中,

$$\angle B+\angle D+\angle F=360°,$$

并且

$$\frac{AB}{BC}\cdot\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA}=1. \quad ①$$

求证:

$$\frac{BC}{CA}\cdot\frac{AE}{EF}\cdot\frac{FD}{DB}=1. \quad ②$$

已知与求证均出现了线段的比, 所以肯定要利用相似三角形. 做法有的像第 17 节, 只不过相似代替了全等.

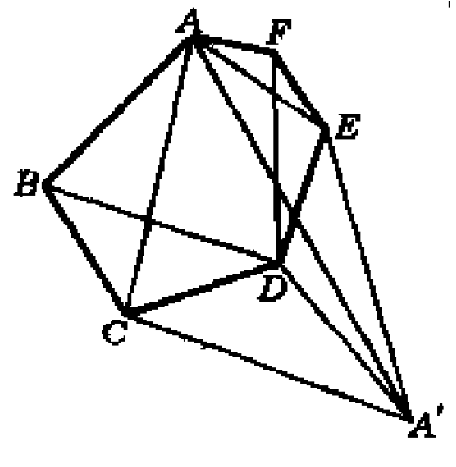


图 153

如图 153, 以 CD 为一边作 $\triangle CDA'\backsim\triangle CBA$ (即将 $\triangle CBA$ 绕 C 旋转, 使 CB 边落到 CD 上, 再以 C 为中心, 作位似变换, 使得 B 与 D 重合. 这时 A 变成 A'), 则

$$\frac{CD}{A'D}=\frac{CB}{AB}=\frac{CD}{DE}\cdot\frac{EF}{FA},$$

从而

$$\frac{DE}{A'D}=\frac{EF}{FA}.$$

由已知易得

$$\begin{aligned}\angle A'DE&=360°-\angle CDE-\angle CDA'\\&=360°-\angle CDE-\angle CBA=\angle EFA,\end{aligned}$$

所以

$$\triangle EFA \backsim \triangle EDA'.$$

可以看成将$\triangle EFA$绕E旋转，再以E为中心作位似变换，变成$\triangle EDA'$.

由此易得$\angle FED=\angle AEA'$，$\frac{EF}{ED}=\frac{EA}{EA'}$，所以

$$\triangle EFD \backsim \triangle EAA',$$

$$\frac{FD}{AA'}=\frac{FE}{AE}. \quad ③$$

类似地，$\triangle CBD \backsim \triangle CAA'$，

$$\frac{DB}{A'A}=\frac{BC}{AC}. \quad ④$$

③除以④即得②.

83. 直线与圆相切

直线与圆相切时，弦切角与直线夹的弧所对的圆周角相等．反过来，如图 154，当$\angle DBC=\angle A$时，BD与$\odot BAC$相切．下题即用到这一结论．

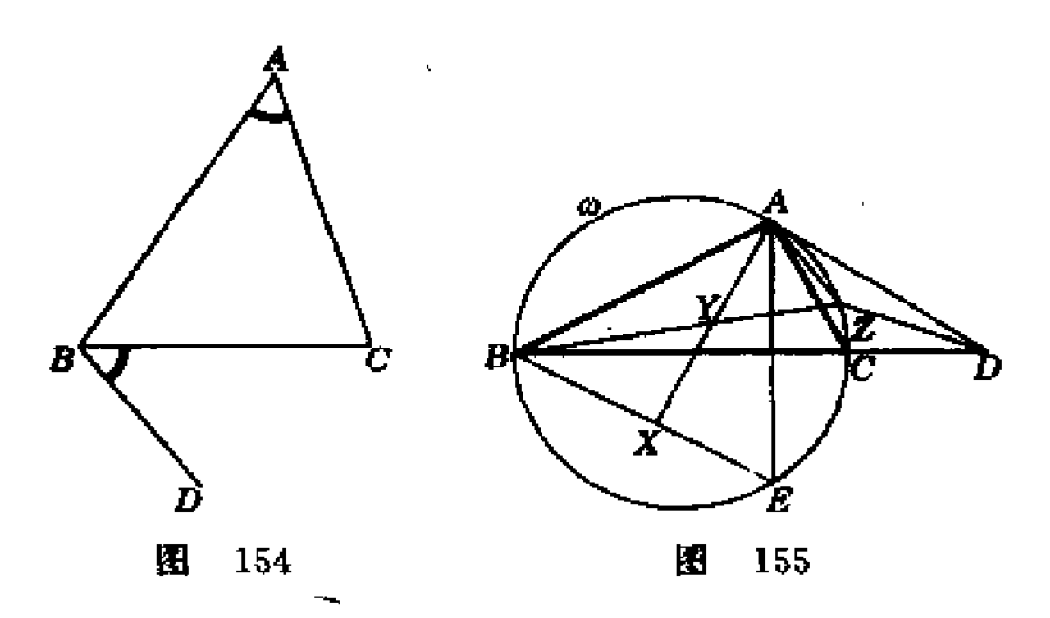


图 154　　图 155

已知$\triangle ABC$中，$\angle A=90^\circ$，$\angle B<\angle C$. 外接圆ω在A处的切线交直线BC于D. 设E为A关于BC的对称点，X为A到BE的垂足，Y为AX的中点，直线BY又交ω于Z. 证明直线BD与$\triangle ADZ$的外接圆相切(图 155).

我们要证$\angle ZDB=\angle ZAD$，而$\angle ZAD=\angle ZEA$，所以应有

$$\angle ZDB=\angle ZEA. \qquad ①$$

反过来，如果能证明①成立，那么结论也就得出了.

如图 156，设BD与AE相交于F，则F是AE的中点，①即Z，F、E、D四点共圆. 这四点共圆当然不能用①来证(而是由四点共圆导出①)，所以应考虑其他角之间的关系. 例如

$$\angle EZF=\angle EDF. \qquad ②$$

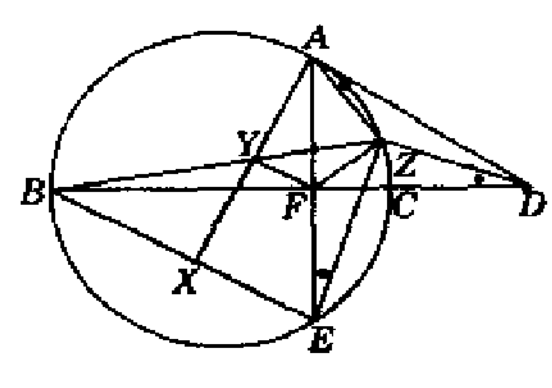


图 156

②的右边是一个比较容易用已知角表示的角：设$\angle ABC=\beta$，则$\angle EBD=\beta$，

$$\angle EDF=90^\circ-\angle FED=90^\circ-2p.$$

而$\angle EZF$也有种种条件可以利用，有希望算出(如果证$\angle EZD=\angle EFD=90^\circ$，那么计算$\angle EZD$涉及$D$点，难于解决，似乎兜了一个圈子还要去算未知的$\angle ZDF$. 现在算$\angle EZF$，已与$D$无关，这是一个大好的兆头).

事实上，$YF/\!/XE$，所以

$$\angle YFA=\angle BEA=\angle BZA,$$

$$A,Y,F,Z\text{ 四点共圆}.$$

从而

$$\angle EZF=\angle EZB-\angle BZF$$
$$=\angle EAB-\angle EAX$$
$$=\angle BAX$$
$$=90^\circ-2\beta.$$

于是②成立. 证毕.

证明中,由 $YF /\!/ XE$ 及 A,B,E,Z 四点共圆导出 A,Y,F,Z 四点共圆,也是常用的手法,希望读者能够注意.

84. 三个四边形的面积

如图 157,O 是面积为 S 的凸四边形 $ABCD$ 内一点. K,L,M,N 分别是边 AB,BC,CD,DA 的内点. 若 $OKBL,OMDN$ 是平行四边形,S_1,S_2 分别为四边形 $ONAK,OMCL$ 的面积. 证明:

$$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}.$$

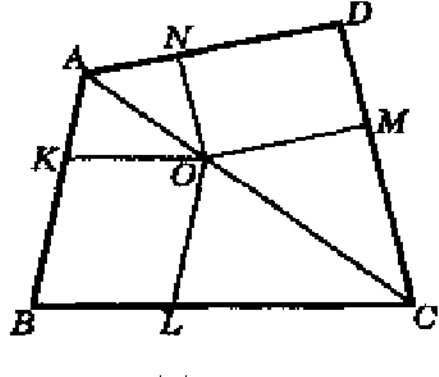


图 157

如果 O 在对角线 AC 上,那么

$$S_{\triangle OAN}=\frac{AO^2}{AC^2}S_{\triangle ACD},$$

$$S_{\triangle KOA}=\frac{AO^2}{AC^2}S_{\triangle ABC}.$$

相加得

$$S_1=\frac{AO^2}{AC^2}S,$$

即

$$\sqrt{S_1}=\frac{AO}{AC}\sqrt{S}.$$

同理

$$\sqrt{S_2}=\frac{OC}{AC}\sqrt{S}.$$

所以

$$\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}=\sqrt{S}.$$

对于一般情况，过 O 作 BD 的平行线交 AC 于 O'. 关于 O'，设相应的四边形为 $O'N'AK'$，$O'M'CL'$（图 158），面积为 S_1'，S_2'，则

$$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S_1'}+\sqrt{S_2'}.$$

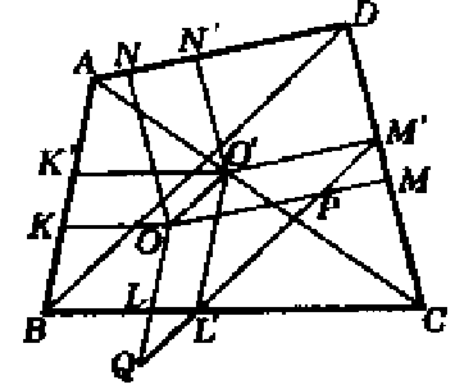


图 158

连接 $L'M'$，交 OM 于 P. $M'L'$ 与 OL 的延长线相交于 Q. 由 $O'L'\,/\!/\,AB$，$O'M'\,/\!/\,AD$ 得 $\frac{CL'}{CB}=\frac{CO'}{CA}=\frac{CM'}{CD}$，所以 $L'M'\,/\!/\,BD$，从而

$$S_{OO'M'M}\geqslant S_{OO'M'P}=S_{OO'L'Q}\geqslant S_{OO'L'L},$$

即

$$S_2'\geqslant S_2.$$

同理

$$S_1'\geqslant S_1.$$

所以

$$\sqrt{S}\geqslant\sqrt{S_1}+\sqrt{S_2}.$$

85. 俄罗斯竞赛题(一)

下面介绍 2000 年俄罗斯数学奥林匹克中的几何题.

1. 如图 159，设锐角三角形 ABC 的外心为 O，$\triangle AOC$ 的外心为 K. $\odot K$ 分别与 AB，AC 再交于 M，N. K 关于 MN 的对称点为 L.

求证：　$AL \perp BC$.

只需证明 $AL /\!/ OK$. 为此，我们证明四边形 $OKLA$ 是平行四边形. 因为 $\angle OAB = 90° - \frac{1}{2}\angle AOB = 90° - \angle C = 90° - \angle AMN$，所以 $OA \perp MN$，从而 $OA /\!/ KL$.

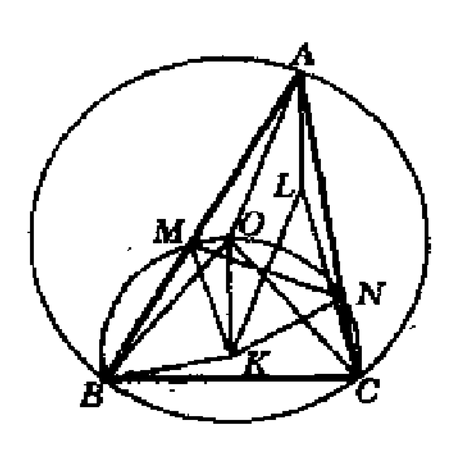


图　159

只需再证 $KL = OA$. 为此注意 $\triangle NKL$ 与 $\triangle KOB$，它们的边 $NK = NL = KO = KB$. 又

$$\angle KOB = \frac{1}{2}\angle BOC = \angle BAC,$$

对于$\odot K$ 的弧，$\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{MN}$的$\frac{1}{2}$是$\angle BAC$ 的度数，而$\overset{\frown}{BC}$的度数即$\angle BKC = 2\angle BOC = 4\angle BAC$ 的度数，所以$\overset{\frown}{MN}$的度数即

$$4\angle BAC - 2\angle BAC = 2\angle BAC,$$

从而$\angle LKN = \frac{1}{2}\angle MKN = \angle BAC = \angle KOB$. 于是

$$\triangle NKL \cong \triangle KOB,\ KL = OB = OA.$$

$$AL \perp BC.$$

2. 如图 160，在$\triangle ABC$ 的中线 CD 上任取一点 E. 圆 S_1 过 E，并且与 AB 相切于 A；圆 S_2 过 E，并且与 AB 相切于 B；圆 S_1，S_2 分别交 AC，BC 于 M，N. 求证$\triangle CMN$ 的外接圆与圆 S_1，S_2 都相切.

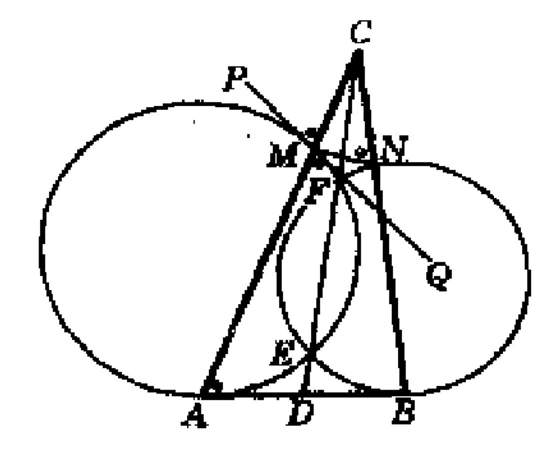


图　160

D 到圆 S_1，S_2 的切线长 $DA = DB$，所以 D 在这两个圆的

根轴上．而两圆的交点 E 也在根轴上，所以 CD 就是两个圆的根轴．从而

$$CM\times CA=CN\times CB,$$

M,N,B,A 四点共圆．

过 M 作圆 S_1 的切线 PQ，则

$$\angle PMC=\angle AMQ=\angle MAB=\angle CNM,$$

所以 PQ 也与 $\triangle CMN$ 的外接圆相切于 M，从而 $\triangle CMN$ 的外接圆与圆 S_1 相切于点 M．

同理，$\triangle CMN$ 的外接圆与圆 S_2 相切于点 N．

以上两题都是九年级的赛题．

86．俄罗斯竞赛题（二）

以下两道题是十年级的，最后一道题是十一年级的赛题．

1．如图161，在锐角三角形 ABC 中，高 AA_1 与 CC_1 所夹的锐角的平分线分别交 BA，BC 于 P,Q．垂心 H 与 AC 中点 M 的连线与 $\angle ABC$ 的平分线相交于 R．

求证：P,B,Q,R 四点共圆．

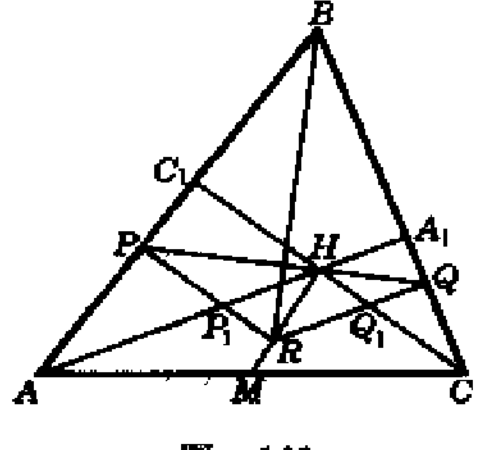


图 161

由于 $\angle C_1HP=\angle CHQ=\angle A_1HQ$，所以 $\angle C_1PH=\angle A_1QH$，$BP=BQ$．

设 $\triangle BPQ$ 的外接圆与 $\angle ABC$ 的平分线相交于 R'，则 BR' 是外接圆的直径，$R'P\perp BP$，$R'Q\perp BQ$．所以 $R'P\parallel CC_1$，$R'Q\parallel AA_1$．

设 $R'P$，$R'Q$ 分别交 HA，HC 于 P_1，Q_1，则四边形

$HP_1R'Q_1$ 是平行四边形. 因此 HR' 平分 P_1Q_1.

因为 $R'P /\!/ CC_1$，所以

$$\frac{AP_1}{AH}=\frac{PP_1}{C_1H}.$$

同理

$$\frac{CQ_1}{CH}=\frac{QQ_1}{A_1H}.$$

易知$\triangle P_1PH \backsim \triangle Q_1QH$，$\triangle PC_1H \backsim \triangle QA_1H$，所以

$$\frac{PP_1}{QQ_1}=\frac{PH}{QH}=\frac{C_1H}{A_1H},$$

从而

$$\frac{AP_1}{AH}=\frac{PP_1}{C_1H}=\frac{QQ_1}{A_1H}=\frac{CQ_1}{CH}.$$

于是 $P_1Q_1 /\!/ AC$. HR' 平分 P_1Q_1，所以 HR' 也平分 AC，即 H，R'，M 共线. R' 就是 HM 与 $\angle ABC$ 的平分线的交点 R.

2. 如图 162，$\odot O$ 内，$\odot O_1$ 与 $\odot O$ 相切于 N. $\odot O$ 的弦 BA，BC 分别与 $\odot O_1$ 相切于 K，M. 不含 N 点的弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$ 的中点分别是 Q，P. 设 $\triangle BQK$ 与 $\triangle BPM$ 的外接圆的第二个交点为 B_1.

求证：四边形 BPB_1Q 为平行四边形.

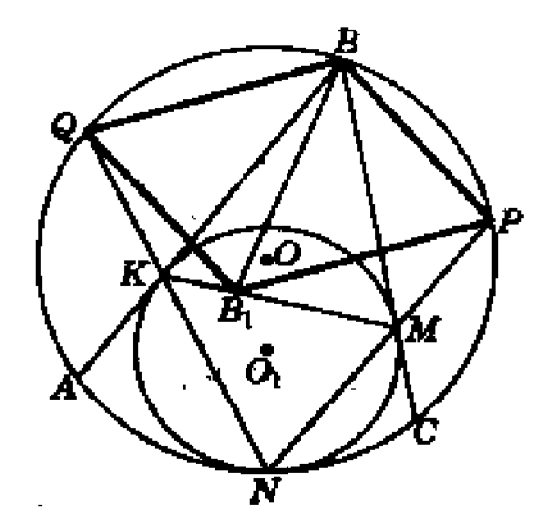


图 162

以 N 为位似中心，将 $\odot O_1$ 变成 $\odot O$. 设这时 K 变为 $\odot O$ 上一点 Q'，则 AB 变为 $\odot O$ 的过 Q' 的切线，它与 AB 平行. 由于过 Q' 的切线与弦 AB 平行，所以 Q' 就是 $\overset{\frown}{AB}$ 的中点 Q. 故 N，K，Q 共线.

同理，N,M,P 共线.

因为 Q,B_1,K,B 共圆，所以

$$\angle BB_1K=\angle BQK=180^\circ-\angle BPN.$$

因为 B,B_1,M,P 共圆，所以

$$\angle BB_1M=180^\circ-\angle BPN=\angle BB_1K,$$

从而 B_1,K,M 三点共线.

$$\angle QB_1B=\angle QKB=\angle AKN=\angle KMN=\angle B_1BP,$$

所以 $QB_1/\!/BP$.

同理 $PB_1/\!/BQ$. 证毕.

3. 如图 163，四边形 $ABCD$ 外切于圆 ω. 直线 AB,CD 相交于 O. 圆 ω_1,ω_2 与 AB,CD 都相切，并且圆 ω_1 与 BC 相切于 K，圆 ω_2 与 AD 相切于 L. 已知 O,K,L 三点共线. 求证：BC 的中点、AD 的中点及圆 ω 的圆心三点共线.

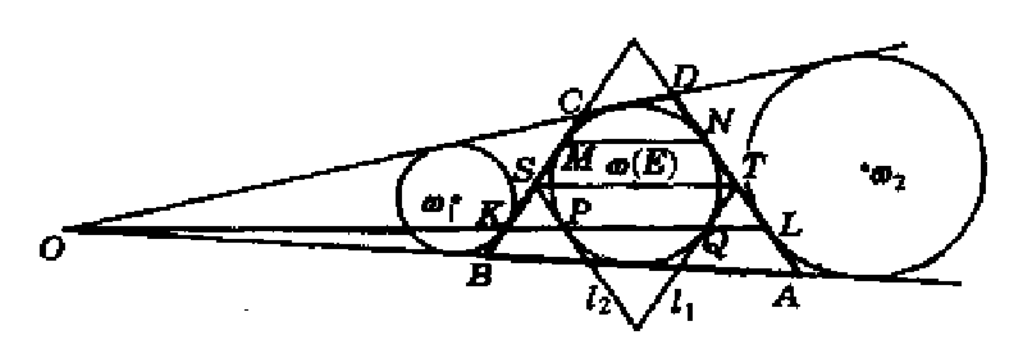


图 163

设 KL 与圆 ω 的交点为 P,Q. BC,AD 与圆 ω 的切点分别为 M,N.

以 O 为位似中心，将圆 ω_1 变为圆 ω，则 K 点处的切线 BC 变为 Q 点处的切线 l_1，$l_1/\!/BC$.

以 O 为位似中心，将圆 ω_2 变为圆 ω_1，到 L 点处的切线 AD 变为 P 点处的切线 l_2，$l_2/\!/AD$.

于是 l_1,l_2,BC,AD 围成一个平行四边形. 它是圆 ω 的外

切四边形，因而是菱形．圆 ω 的圆心 E 是这个菱形的中心．对角线 ST 过 E 而且与 MN，PQ 平行，到 MN，PQ 的距离相等．所以 S，T 分别为 MK，NL 的中点．

由于 $BK=MC$（注），所以 S 也是 BC 的中点．同理 T 是 AD 的中点．证毕．

注：　（圆 ω 与 ω_1 的外公切线长）$-BK-KB$

$=BM-BK$

$=$圆 ω 与 ω_1 的内公切线长

$=CK-CM$

$=$（圆 ω 与 ω_1 的外公切线长）$-CM-CM$，

所以 $BK=CM$．

（八）任　我　游

87. 逆　平　行　线

读课外书就像逛公园，可以由着自己的性子四处浏览. 本章的内容不在通常的中学课本内，但中学生不难读懂它.

在$\triangle ABC$中，如果$EF /\!/ BC$，并且E，F分别在AB，AC上，那么

$$\triangle AEF \backsim \triangle ABC. \qquad ①$$

如果E'，F'分别在AB，AC上，并且B，C，F'，E'四点共圆，那么

$$\angle AE'F' = \angle ACB,$$

从而

$$\triangle AE'F' \backsim \triangle ACB. \qquad ②$$

$E'F'$称为关于AB，AC与BC逆平行，在不致混淆时，也简称$E'F'$与BC逆平行. 逆平行线截得的三角形与原三角形相似，但必须注意①，②同是表示两个三角形与原三角形相似，字母的对应关系却分别是$E \to B(F \to C)$，$E' \to C(F' \to B)$.

易知$EF /\!/ BC$，$E'F'$与BC逆平行时，$E'F'$与EF也是（关于AB，AC的）一对逆平行线.

不难证明，如果$E'F'$，MN都是BC的逆平行线，那么$E'F' /\!/ MN$（图 164）.

如果BN，CM分别是AC，AB边上的高，那么MN与

BC 逆平行. 这是最常见的一对逆平行线.

在第 38 节已经证过下面的结论:

外心 O 与顶点 A 的连线垂直于 BC 的逆平行线.

因此,作边的逆平行线,最简单的办法就是作 $OA(OB, OC)$ 的垂线.

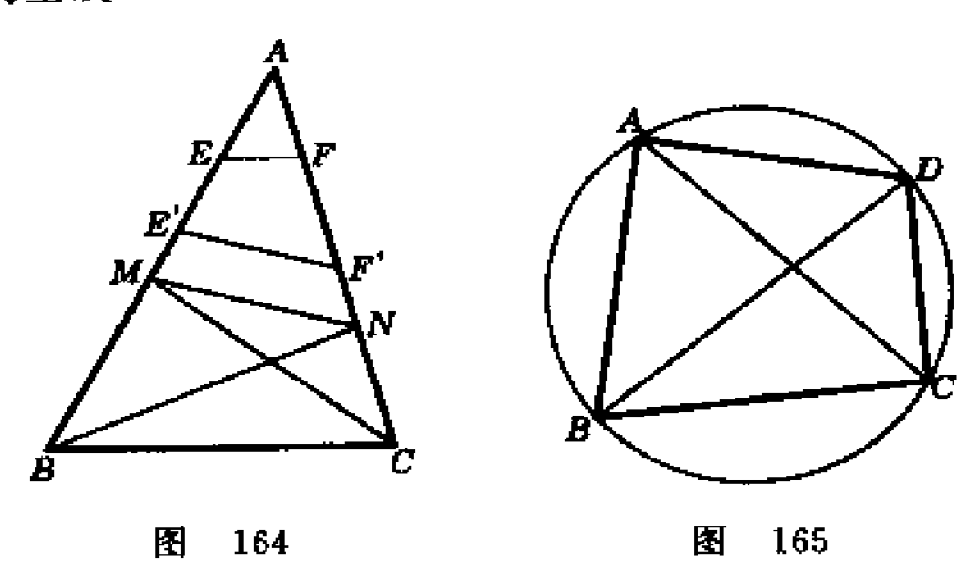


图 164 图 165

逆平行线并不限于三角形内. 一般地,设 A, B, C, D 四点共圆,则称 AD, BC 关于 AB, CD 逆平行,也称 AD, BC 关于 AC, BD 逆平行(图 165). 这与上面的定义实际上是一致的.

逆平行线的概念在证明中颇为有用,下面举一个例子.

如图 166, AB 是 $\odot O$ 的直径, PA 为切线. 过 P 任作一割线交 $\odot O$ 于 C, D. 连接 BC, BD 分别与 PO 相交于 E, F. 求证: $EO=OF$.

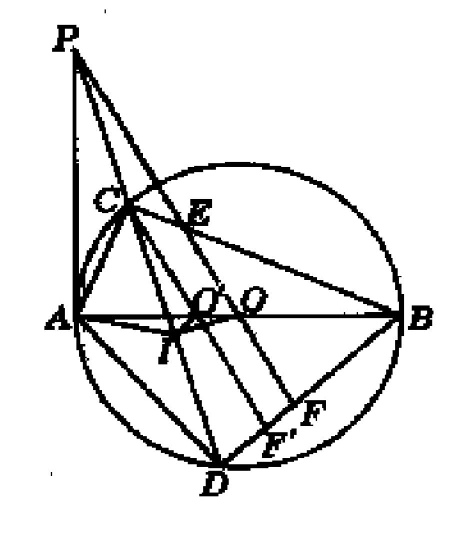


图 166

过 C 作 PO 的平行线,分别交 AB, BD 于 O', F'. 只需证

$$CO'=O'F'. \quad ①$$

取 CD 的中点 I. 要证①，只需证

$$O'I /\!/ BD. \qquad ②$$

因为 A,C,B,D 四点共圆，所以 AC 与 BD 关于 AB,CD 逆平行. 要证②，只需证明 $O'I$ 与 AC 关于 AB,CD 逆平行，即 O',I,A,C 四点共圆. 换句话说，只需证明 AI 与 $O'C$ 关于 AB,CD 逆平行.

因为 $O'C /\!/ PO$，所以只需证明 AI 与 PO 关于 AB,CD 逆平行，即 A,I,O,P 四点共圆.

而由 $\angle OIP=\angle PAO=90°$，立即得出 A,I,O,P 四点共圆，从而 $EO=OF$ 成立.

88. 共轭重心(一)

几何学历史悠久，自欧几里得算起，也已经有两千多年. 经过两千多年的“采掘”，平面欧氏几何的大部分菁华已经落人人类手中. 但在19世纪后半叶，又发现了一个宝库，得出不少新结果. 这些结果可见以下书籍：

1. J. Casey,《近世几何学初编》，李俨编译，商务印书馆，1952年出版.

2. R. A. Johnson,《近代欧氏几何学》，单墫译，上海教育出版社，1999年出版.

3. W. Gallatly, *Modern Geometry of the Triangle*, London, 1910.

自本节起，我们介绍一些有关共轭重心的结果.

在第81节，已经说过等角共轭点. 设自 $\angle A$ 的顶点 A 引出两条射线，与它的两边成等角，则称它们为(关于 $\angle A$ 的)等角线. 在第81节，已经证明了以下定理：

设过三角形三个顶点的三条直线交于一点 P，则它们的(关于三角形相应角)的等角线也交于一点 Q.

点 Q 称为点 P 的等角共轭点.

重心 G 的等角共轭点称为共轭重心.

1873 年法国的科学进步协会在里昂开会，会上 E・莱莫恩(Emile Lemoine)介绍了共轭重心及一系列相关问题，对上述平面欧氏几何的复兴起着重要的推动作用. 因此法、英等国称共轭重心为莱莫恩点，但德国的著作却称之为格黎伯(Grebe)点. 其实莱莫恩与格黎伯对共轭重心的知识均有贡献，但根据数学史家麦凯(Mackay)的研究，这个点并非某个人一时的发现，而是由不同的研究者研究它的各种性质，逐渐成为著名的点. 因此，还是称它为共轭重心为好.

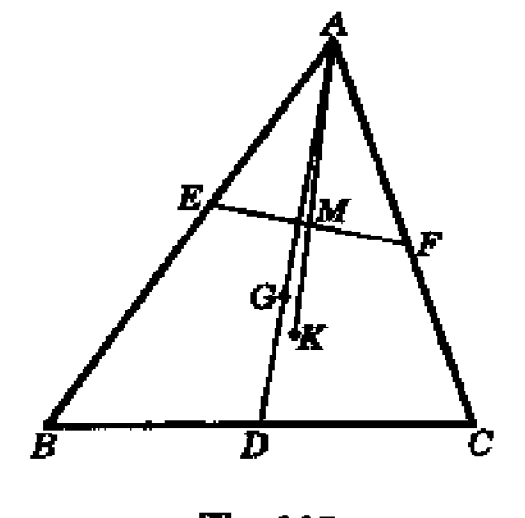


图 167

上节已经说过逆平行线. 如图 167，设 K 为共轭重心，EF 与 BC 是(关于 AB，AC 的)逆平行，则必有 AK 平分 EF.

事实上，$\triangle AEF \backsim \triangle ACB$，而直线 AK 正好与 $\triangle ACB$ 的中线 AD 相对应(因为 $\angle BAD = \angle FAK$)，所以 AK 平分 EF.

反过来，如果 AK 平分 EF，那么 EF 与 BC 逆平行.

事实上，设 EF 中点为 O，过 O 作 BC 的逆平行线 $E'F'$(E'，F' 分别在 AB，AC 上)，则 $E'F'$ 被 AK 平分，即以 O 为中点. 因而 $E'E$ 与 $F'F$ 平行；但 $E'E$ 与 $F'F$ 相交于 A，所以只能是 E' 与 E(或 F' 与 F)重合. 从而 $E'F'$ 与 EF 重合，EF 与 BC 逆平行.

89. 共轭重心(二)

如图 168，在$\triangle ABC$中，设G为重心. $\triangle BGC$，$\triangle CGA$，$\triangle AGB$的外心分别为P，Q，R. 证明：$\triangle PQR$的重心、共轭重心分别为$\triangle ABC$的外心O、重心G.

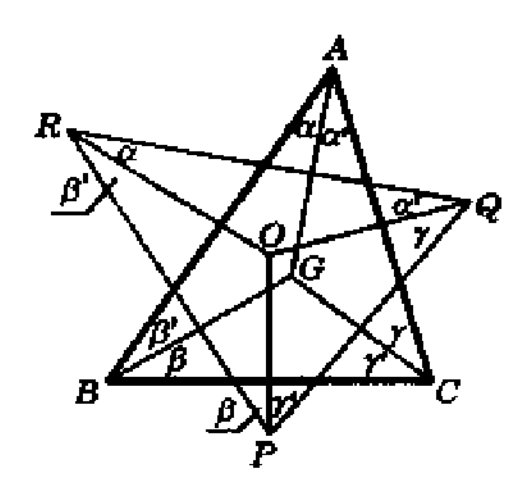


图 168

设$\angle BAG=\alpha$，$\angle GAC=\alpha'$，$\angle ACG=\gamma$，$\angle GCB=\gamma'$，$\angle CBG=\beta$，$\angle GBA=\beta'$.

因为$\triangle AGB$的外接圆与$\triangle BGC$的外接圆的公共弦是GB，所以$PR\perp GB$. 又$\triangle ABC$的外接圆与$\triangle AGB$的外接圆的公共弦是AB，所以$OR\perp AB$. 从而$\angle PRO$与$\angle OBG$是等角的余角，$\angle PRO=\angle OBG=\beta'$. 同理可定出其他角，如图 168 所示.

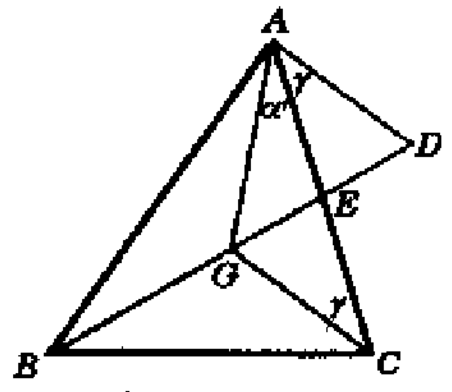


图 169

如图 169，延长中线BE到D，使$ED=GE$，则易知$\triangle AGD$的三边分别与GA，GB，GC重合或平行，而且中线AE与边GA，AD所成角为α'，γ等等.

由于$\triangle PQR$的边分别与GA，GB，GC垂直，所以也分别与$\triangle AGD$的边垂直，这两个三角形相似. 而OQ与边RQ，QP所成角为α'，γ等等，所以OQ等等是中线，O是$\triangle PQR$的重心.

又P是$\triangle BGC$的外心，所以

$$\angle BPG=2\angle BCG=2\gamma'.$$

而 PR 垂直平分 GB，所以

$$\angle RPG=\frac{1}{2}\angle BPG=\gamma'=\angle OPQ.$$

即在 $\triangle PQR$ 中，PG 与 PO 是关于 $\angle RPQ$ 的等角线.

同理可证 QG 与 QO，RG 与 RO 是关于相应角的等角线. 所以 O，G 共轭，G 是 $\triangle PQR$ 的共轭重心.

90. 塔 克 圆

自 $\triangle ABC$ 的边 AB 上一点 P 开始，交错地作相应边的逆平行线、平行线得 Q，R，S，T，U（图 170）. 证明：$UP/\!/AC$，并且 P，Q，R，S，T，U 六点共圆.

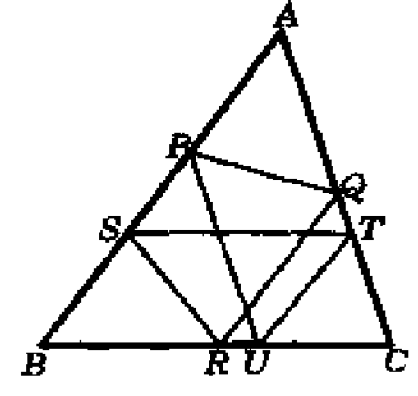


图 170

因为 PQ 与 BC 逆平行，所以 $\angle APQ=\angle C$. 同理 $\angle RSB=\angle C$. 又 $QR/\!/AB$，所以四边形 $QRSP$ 是梯形，而且是等腰梯形（两腰与底边等倾角），所以 $PQ=SR$.

同理 $TU=SR$.

于是 $TU=PQ$. 但 TU、PQ 与 AC 等倾角，所以 U，P 到 AC 的距离相等，即 $UP/\!/AC$.

显然等腰梯形的顶点共圆，所以 P，S，R，Q 共圆. 又 PU 与 SR 逆平行，所以 P，S，R，U 共圆，即 P，Q，R，S，U 共圆.

同理 T 也在这个圆上.

这样的圆称为塔克(Tucker)圆. 塔克圆的圆心，位置当然随 P 点的位置而变化. 但我们有下面的结果：

设 $\triangle ABC$ 的外心为 O，共轭重心为 K.

不论 P 点在 AB 上如何选取，上面得到的塔克圆，圆心

一定在直线 KO 上.

事实上，设 PQ 的中点为 L，RS 中点为 M，TU 中点为 N，则由于 K 为共轭中心，KA 过 L 等等.

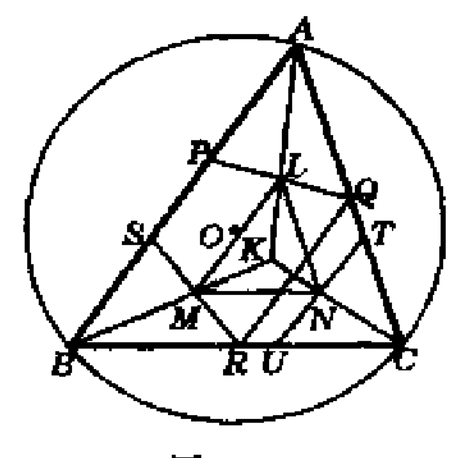


图 171

因为 LM 是梯形 $PQRS$ 的中位线，所以 $LM \parallel AB$. 同理 $MN \parallel BC$，$NL \parallel CA$.

于是 K 是 $\triangle ABC$ 与 $\triangle LMN$ 的位似中心. 在这一位似变换下，$\triangle ABC$ 的外心 O 变为 $\triangle LMN$ 的外心 W，$WL=WM=WN$，并且 W 在 KO 上，$WL \parallel OA$.

在第 38 节已指出 $OA \perp PQ$，所以 $WL \perp PQ$. 因此 W 在 PQ 的垂直平分线上.

同理 W 在 TU 的垂直平分线上. 因此 W 就是塔克圆的圆心.

91. 莱莫恩圆

自 $\triangle ABC$ 的共轭重心 K 作各边的平行线，与其他两边相交，得六个点 P,Q,R,S,T,U，这六点必定共圆.

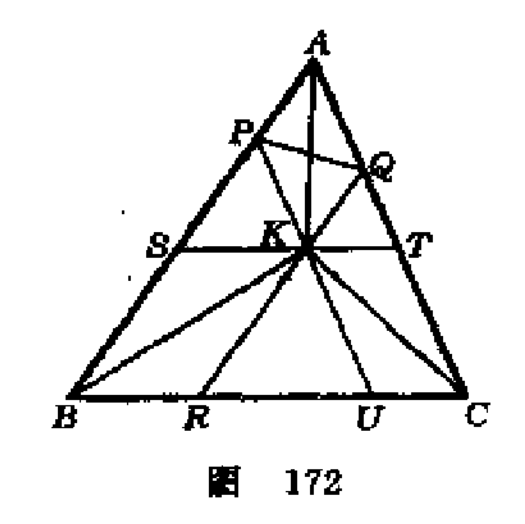


图 172

如图 172，四边形 $APKQ$ 是平行四边形，所以 KA 平分 PQ. 因为 K 是共轭重心，所以 PQ 与 BC 逆平行（参见 87 节）.

同理 TU 与 AB 逆平行，RS 与 AC 逆平行.

因此 P,Q,R,S,T,U 六点共圆(塔克圆).

上面所得的圆称为第一类莱莫恩圆.

自共轭重心 K 作各边的逆平行线,与其他两边相交,得 P,Q,R,S,T,U 六点,这六点也必定共圆.

如图 173,因为 K 是共轭重心, PS 与 AC 逆平行, 所以 PS 被 K 平分.

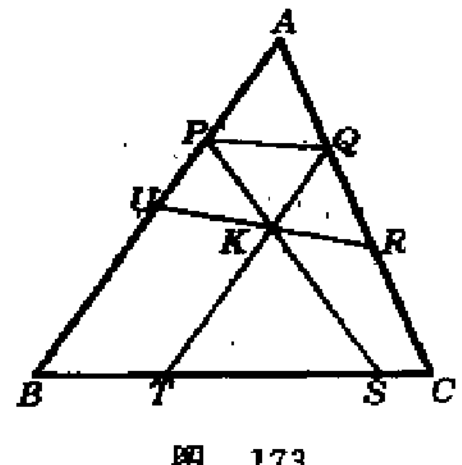


图 173

同理 QT 被 K 平分. 于是四边形 $PQST$ 是平行四边形,$PQ/\!/BC$.

同理,$RS/\!/AB$,$TU/\!/AC$.

于是 P,S,R,U,T,Q 六点共圆(塔克圆).

上面所说的圆称为第二类莱莫恩圆.

在第二类莱莫恩圆中,弦 PS,QT 互相平分,从而它们的公共中点 K 就是圆心. 即共轭重心 K 是第二类莱莫恩圆的圆心.

第一类莱莫恩圆的圆心 W 在哪里呢?

由上节,W 在 KO 上. 而且由于图 172 中,KA 与 PQ 互相平分,所以 PQ 的中点 L 也是 KA 的中点. 而

$$\frac{KW}{KO}=\frac{KL}{KA}=\frac{1}{2},$$

所以第一类莱莫恩圆的圆心 W 是线段 KO 的中点.

（九）已觉此处景物好

92. 四点间的距离

本章将介绍几个定理及定理的证明.

平面上任意四点 A,B,C,O，两两之间的距离共有六个，即图中的 a,b,c,x,y,z. 这六个距离有一定的关系.

由余弦定理，

$$\cos\alpha=\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}, \quad ①$$

$$\cos\beta=\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx}, \quad ②$$

$$\cos\gamma=\frac{x^2+y^2-c^2}{2xy}. \quad ③$$

图 174

而 α,β,γ 之间有关系：

$$\alpha+\beta+\gamma=360° \quad ④$$

（或类似的关系，随 O 的位置不同而略有不同，但不影响最后的结论）. 因此

$$\begin{aligned}\cos\gamma&=\cos(360°-\alpha-\beta)=\cos(\alpha+\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sqrt{(1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta)}.\end{aligned} \quad ⑤$$

将①，②，③代入⑤，得

$$\frac{x^2+y^2-c^2}{2xy}=\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}\cdot\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx}$$

$$-\sqrt{\left[1-\left(\frac{y^2+z^2-a^2}{2yz}\right)^2\right]\left[1-\left(\frac{z^2+x^2-b^2}{2zx}\right)^2\right]}.$$

化简得

$$2z^2(x^2+y^2-c^2)-(y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)$$
$$=-\sqrt{[4y^2z^2-(y^2+z^2-a^2)^2][4z^2x^2-(z^2+x^2-b^2)^2]}.$$

平方得

$$[2z^2(x^2+y^2-c^2)-(y^2+z^2-a^2)(z^2+x^2-b^2)]^2$$
$$=[4y^2z^2-(y^2+z^2-a^2)^2][4z^2x^2-(z^2+x^2-b^2)^2].$$

再经过一番化简得

$$\sum a^2(x^2-y^2)(x^2-z^2)-\sum a^2(b^2+c^2-a^2)x^2+a^2b^2c^2=0, \tag{⑥}$$

其中$\sum$表示将 a,b,c 轮换，x,y,z 轮换而得出的三个式子的和.

在得出⑤式时，破坏了“对称性”(爱因斯坦大概会批评这种推导是“丑陋的”)，但最后导出的⑥关于 a,b,c 对称，也关于 x,y,z 对称.

运用一点距离几何学的知识，可以不破坏“对称性”，“优雅”地得出⑥，而且可以写成更漂亮的形式：

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & x^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & y^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & z^2 & 1 \\ x^2 & y^2 & z^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=0. \tag{⑦}$$

⑦的左边是一个对称的五阶行列式(与⑥式左边只差一个因子 -2)，它有很强的几何意义，即如果 O,A,B,C 是空间四点，设四面体 $OABC$ 的体积为 V，则⑦式左边就是 $288V^2$. 所

以它是已知六条棱长，求四面体体积的公式. 当 O,A,B,C 在同一平面时，体积退化为 0.

比⑦式左边低一维的、与平面上三点 A,B,C 有关的四阶行列式是

$$\begin{vmatrix} 0 & c^2 & b^2 & 1 \\ c^2 & 0 & a^2 & 1 \\ b^2 & a^2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} (=-\sum a^4+2\sum b^2c^2),$$

其中 a,b,c 是 $\triangle ABC$ 的边长.

这个行列式是 $16\Delta^2$，Δ 是 $\triangle ABC$ 的面积.

93. 笛卡儿关于圆的定理

如果半径为 r_1,r_2,r_3 的三个圆两两外切，同时又都与半径为 r_4 的圆外切，如图 175 所示，那么上一节的公式中，

$$a=r_2+r_3,\ b=r_3+r_1,\ c=r_1+r_2;$$
$$x=r_4+r_1,\ y=r_4+r_2,\ z=r_4+r_3. \qquad ①$$

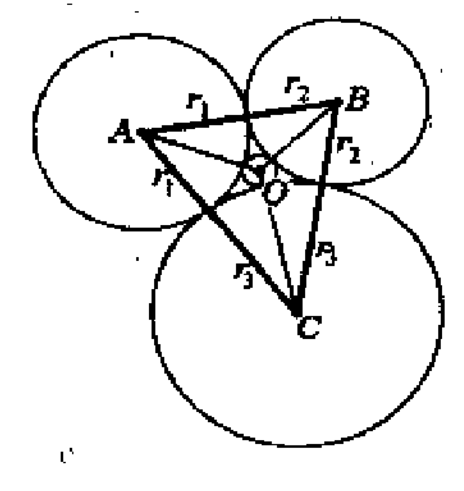


图 175

代入上节⑥，经过恒等变形，可得

$$\sum_{i=1}^{4}\frac{1}{r_i^2}=2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}\frac{1}{r_ir_j}. \qquad ②$$

这一变形相当麻烦. 如果熟悉行列式的性质，将①代入上节⑦，可以比较简单地导出②.

如果半径为 r_4 的圆与前三个圆内切，②仍然适用，只需将其中 r_4 均改为 $-r_4$.

于是，当第四个圆与前三个圆外切时，由②得

$$\left(\frac{1}{r_4}-\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}-\frac{1}{r_3}\right)^2=\frac{4(r_1+r_2+r_3)}{r_1r_2r_3}, \qquad ③$$

从而

$$r_4=\frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}+r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1}. \qquad ④$$

当第四个圆与前三个圆内切时，③中 r_4 应换成 $-r_4$，所以④应改为

$$r_4=\frac{r_1r_2r_3}{2\sqrt{r_1r_2r_3(r_1+r_2+r_3)}-(r_1r_2+r_2r_3+r_3r_1)}. \qquad ⑤$$

以上公式称为笛卡儿(Descartes)关于圆的定理.

在 3 维空间中，如果半径分别为 $r_i(1\leqslant i\leqslant 4)$ 的四个球互相外切，第五个半径为 r_5 的球与前四个相切，那么

$$\sum_{i=1}^{5}\frac{1}{r_i^2}=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5}\frac{1}{r_ir_j}. \qquad ⑥$$

如果第五个圆与第 i 个圆$(1\leqslant i\leqslant 4)$外切，$\frac{1}{r_5r_i}$前而放正号；如果第五个圆与第 i 个圆内切，$\frac{1}{r_5r_i}$前面改放负号.

94. 笛沙格定理的证明

自本节至第 96 节，我们将证明本书开头出现的几个著名定理.

这些定理的证法很多，可以在常见的书上查到. 这里介绍的证法较不常见. 不过均超出了初等平面几何的范围，介绍的目的是希望"跳出去"，从外面看一看"庐山面目".

本节先证明笛沙格定理.

笛沙格定理与透视有关.在平面上倒是较难敲碎的"硬果子".但在空间,情况反而变得简单.

如图 176,设$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1B_2B_3$在两个不同的平面M,N上,面对应顶点交于一点O.这时A_2A_3与B_2B_3的交点C_1也是平面M,N的公共点,因而必在M,N的交线l上.同理C_2,C_3也都在l上,即C_1,C_2,C_3三点共线.

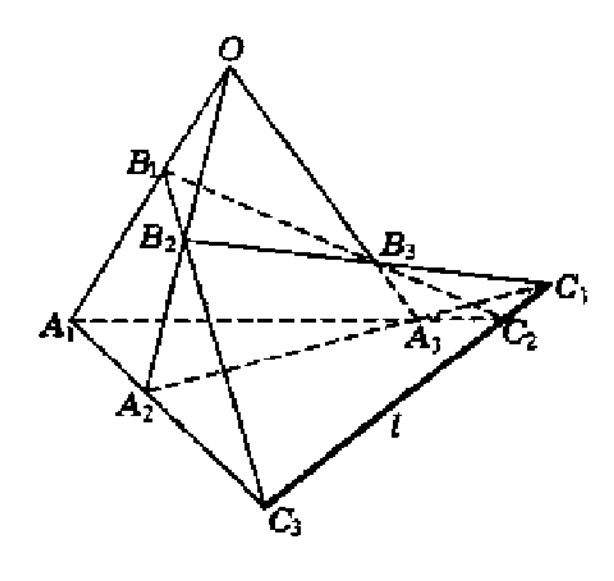


图 176

设想再有一个光源P,将O,B_1,B_2,B_3都照射到平面M上,就得到在平面M上的两个三角形:$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1'B_2'B_3'$,它们的对应顶点的连线交于同一点O',形成平面上的笛沙格定理的图.

反过来,设平照M上有两个三角形:$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1'B_2'B_3'$,它们的对应顶点交于同一点O'.我们可以在平而M外取一点P,连接PO',并在PO'上任取一点O(图 177).

在平面$PO'A_1$内,连接OA_1,交PB_1'于B_1;

在平面$PO'A_2$内,连接OA_2,交PB_2'于B_2;

在平面$PO'A_3$内,连接OA_3,交PB_3'于B_3.

这时$\triangle A_1A_2A_3$,$\triangle B_1B_2B_3$的对应顶点的连线交于同一点O.因此根据上面所说(空间的笛沙格定理),对应边的交点C_1,C_2,C_3共线.其中C_1是A_2A_3与B_2B_3的交点,它是平面PB_2B_3与平而M的公共点,因而也在这两个平面的交线$B_2'B_3'$上,即C_1也是A_2A_3与$B_2'B_3'$的交点.同样C_2,C_3也分别是A_3A_1与$B_3'B_1'$,A_1A_2与$B_1'B_2'$的交点.

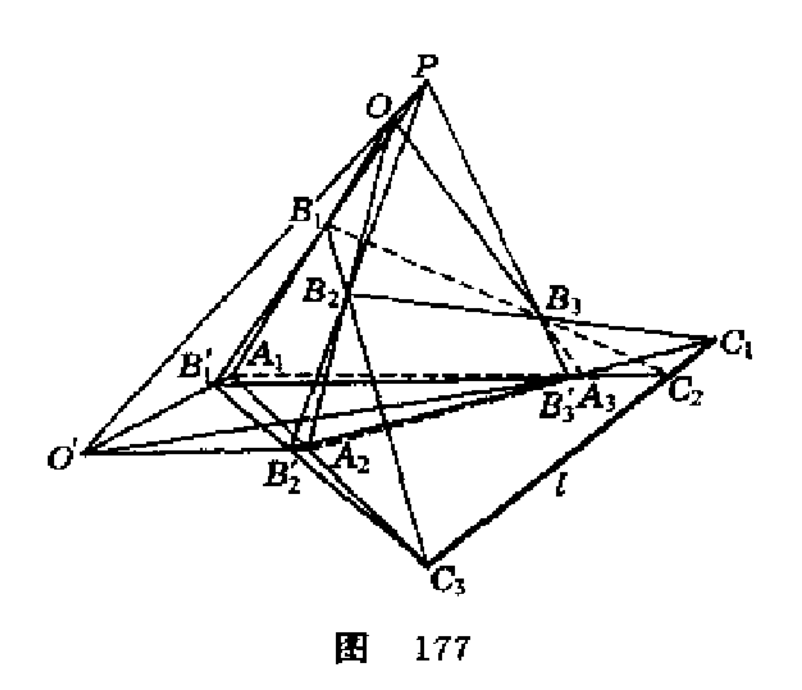


图 177

于是$\triangle A_1A_2A_3$与$\triangle B_1'B_2'B_3'$的对应边的交点C_1,C_2,C_3共线，即平面的笛沙格定理成立.

95. 五点确定二次曲线

本节讨论二次曲线(椭圆、双曲线、抛物线以及退化的情况，即两条直线)的一个重要性质.需要一点解析几何的知识.

大家知道两点确定一条直线，(不在同一条直线上的)三点确定一个圆.那么，几个点确定一条二次曲线呢？

一般情况下，五点确定二次曲线，更准确些说：

设$P_i(i=1,2,3,4,5)$为任意五点，则必有一条二次曲线通过这五点.更进一步，当且仅当五点中，每四点都不共线时，过这五点的二次曲线是唯一的.

首先证存在性.设直线$P_1P_2,P_2P_3,P_3P_4,P_4P_1$的方程分别为

$$l_i=0\quad(i=1,2,3,4),\qquad ①$$

其中$l_i(1\leqslant i\leqslant 4)$都是$x,y$的一次式.则二次曲线

$$l_1l_3=0 \quad ②$$

与

$$l_2l_4=0 \quad ③$$

都过 $P_i(i=1,2,3,4)$.

因而对任意实数 λ_1,λ_2,

$$\lambda_1l_1l_3+\lambda_2l_2l_4=0 \quad ④$$

也都是过上述四点的曲线.

将 P_5 的坐标代入(4),可解得一组不全为 0 的 λ_1,λ_2.对这样的 λ_1,λ_2,④是过上述五个点的二次曲线,除非此时④成为恒等式.对这种情况,$l_1l_3=0$(即 $l_2l_4=0$)就是过上述五个点的二次曲线.

其次证唯一性.设五点 $P_i(1\leqslant i\leqslant 5)$中每四点不共线,而过这五点有两条二次曲线

$$f_i=0 \quad (i=1,2), \quad ⑤$$

其中 f_i 都是 x,y 的二次式.则对任意的实数 λ_1,λ_2,

$$\lambda_1f_1+\lambda_2f_2=0 \quad ⑥$$

也过上述五点.

不妨将直线 P_1P_2 取作 x 轴,即它的方程是

$$y=0. \quad ⑦$$

在 x 轴上取一个与上述五点不同的点 Q,适当选取 λ_1,λ_2(即将 Q 的坐标代入⑥,解出一组 λ_1,λ_2)可使曲线⑥过 Q.设这时将含 y 的项放在一起,不含 y 的项放在一起,即设

$$\lambda_1f_1+\lambda_2f_2=yl+\varphi(x), \quad ⑧$$

其中 l 是 x,y 的一次式,$\varphi(x)$是 x 的二次式.

将 P_1,P_2,Q 的坐标依次代入⑧,得

$$\varphi(x_i)=0 \quad (i=1,2,3), \quad ⑨$$

其中 x_1,x_2,x_3 分别为 P_1,P_2,Q 的横坐标.

$\varphi(x)$是 x 的二次多项式，却有 3 个不同的根，所以必有$\varphi(x)$恒等于 0，从而

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=yl. \tag{10}$$

于是二次曲线

$$yl=0 \tag{11}$$

过五点 $P_i(1\leqslant i\leqslant 5)$，$y=0$ 或 $l=0$ 中必有一个过其中三点，另一个过其余两点．不妨设 $y=0$ 过其中三点（即将过三点的直线取作 $y=0$），这三点为 P_1,P_2,P_3，$l=0$ 过 P_4,P_5，而且可以将⑪作为 $f_1=0$.

重复上面的过程，但这次取一个不在 $yl=0$ 上的点作为 Q．这时得出的曲线⑥过 $P_i(1\leqslant i\leqslant 5)$及 Q．并且由于 $y=0$ 过 P_i 中三点，仍有一次式 l'使

$$\lambda_1 f_1+\lambda_2 f_2=yl',$$

从而

$$yl'=0$$

过 $P_i(1\leqslant i\leqslant 5)$及 Q．因为 $y=0$ 过 P_1,P_2,P_3，不过 Q，所以直线 $l'=0$ 过 P_4,P_5 及 Q．但过 P_4,P_5 的直线 $l=0$ 不过 Q，这就导致矛盾．矛盾表明过五点只有一条二次曲线．

通常认为一般二次曲线

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+ey+f=0 \tag{12}$$

有 6 个参数 a,b,c,d,e,f．可假定其中一个非 0 的参数为 1，实际上只有 5 个参数，因而用五个点的坐标代入⑫，得出五个方程，可以定出其他五个参数．但这种说法似是而非．因为下节我们可以看到三次曲线

$$ax^3+bx^2y+cxy^2+dy^3+ex^2+fxy+gy^2+hx+iy+j=0 \tag{13}$$

有十个参数，却不能由九个点确定．确定它需要十个点．

96. 帕斯卡定理的证明

有了上节的准备，我们可以证明帕斯卡定理了.

仍用图 2 及其中的记号.

设直线 $A_1A_2, A_2A_3, A_3A_4, A_4A_5, A_5A_6, A_6A_1$ 的方程依次为

$$l_i=0 \quad (i=1,2,\cdots,6), \tag{1}$$

$l_i(1\leqslant i\leqslant 6)$都是 x,y 的一次式. 特别地，$l_1=y$(即以 A_1A_2 为 x 轴).

设圆的方程为

$$f=0, \tag{2}$$

f 是 x,y 的二次式.

设直线 DE 的方程为

$$l=0, \tag{3}$$

l 是 x,y 的一次式.

三次曲线

$$l_1l_3l_5=0 \tag{4}$$

显然通过 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$及 D,E,F(因为直线 $l_1=0$ 过 A 点，所以 A 点坐标代入④，左边为 0，即④通过 A_1).

同理，三次曲线

$$l_2l_4l_6=0 \tag{5}$$

也通过上述 9 点.

三次曲线

$$lf=0 \tag{6}$$

通过 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，$D,E$ 八点. 如果有实数 λ_1,λ_2 使

$$\lambda_1l_1l_3l_5+\lambda_2l_2l_4l_6=lf \tag{7}$$

恒成立，那么⑥也通过 F 点．由于②不过 F，所以③过 F，即 D,E,F 三点共线．假定对任意实数 λ_1,λ_2，⑦不成立（不成为恒等式），那么

$$\lambda_1 l_1 l_3 l_5+\lambda_2 l_2 l_4 l_6-lf=0 \tag{8}$$

是通过 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，$D,E$ 八个点的三次曲线．

设过 A_3,A_4,A_5,A_6 及 E 五点的二次曲线为 Ω．取点 P 在 x 轴上，点 Q 不在 x 轴及 Ω 上．将点 P,Q 的坐标代入⑧，得出两个关于 λ_1,λ_2 的方程，解出 λ_1,λ_2．对这样的 λ_1,λ_2，⑧过十个点：$A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，$D,E,P,Q$．

设这时

$$\lambda_1 l_1 l_3 l_5+\lambda_2 l_2 l_4 l_6-lf=yf_1+\varphi(x), \tag{9}$$

其中 f_1 是 x,y 的二次式，$\varphi(x)$ 是 x 的三次式．将 A_1,A_2,D,P 坐标分别代入⑨，得

$$\varphi(x_j)=0\quad(j=1,2,3,4), \tag{10}$$

其中 $x_j(1\leqslant j\leqslant 4)$ 为上述四点的横坐标．由于 $\varphi(x)$ 是 x 的三次式，却在四个 x_j 处为 0，所以必有 $\varphi(x)$ 恒等于 0，即

$$\lambda_1 l_1 l_3 l_5+\lambda_2 l_2 l_4 l_6-lf=yf_1. \tag{11}$$

于是

$$yf_1=0 \tag{12}$$

是过上述十点的三次曲线，而

$$f_1=0 \tag{13}$$

则是过其中六点：A_3,A_4,A_5,A_6,E,P 的二次曲线．但过 A_3,A_4,A_5,A_6,E 五点的二次曲线是唯一的，即曲线 Ω，但它不过 P 点．这一矛盾表明必有 λ_1,λ_2 使⑦成为恒等式，从而直线

$$l=0$$

过 D,E,F 三点．

我们实际上证明了以下定理：

设三次曲线 C_1,C_2 有 9 个公共点,但没有无限多个公共点,如果三次曲线 C_3 通过其中八个公共点,那么 C_3 也通过第九个公共点.

这称为 Caylay – Bacharach 定理.

更一般地,设曲线 C_1,C_2 的次数分别为 d_1,d_2,有 d_1d_2 个公共点,但没有无穷多个公共点.如果次数为 d_1+d_2-3 的曲线 C_3 过其中的 d_1d_2-1 个公共点,那么它也过余下的一个公共点.

上面的定理属于代数几何.代数几何研究代数曲线,即形如

$$F(x,y)=0$$

的曲线,其中 F 是 x,y 的多项式.通常解析几何只研究二次曲线,更高次的曲线则是代数几何研究的内容.

帕普斯定理是帕斯卡定理的特殊情况,其中二次曲线退化为两条直线.上面的证明已包括这种情况在内.

大家还看到三次曲线④,⑤及更一般的

$$\lambda_1 l_1 l_3 l_5+\lambda_2 l_2 l_4 l_6=0$$

都过 A_i($1\leqslant i\leqslant 6$),D,E,F,所以九个点不能确定三次曲线.

（十）更有好景

97. 格点多边形

组合几何，兼有组合与几何的特点. 本章略举数例，以见一斑.

间距为 1 的水平线与间距为 1 的铅直线组成平面直角坐标系.

在平面直角坐标系中，水平线与铅直线的交点，也就是横坐标与纵坐标都是整数的点称为整点或格点.

顶点全是格点的多边形称为格点多边形.

如图 178，如果一个格点多边形的边都不是平行于 y 轴的铅直线，也都不是平行于 x 轴的水平线，证明在这个多边形内部的水平线段的和恰好等于铅直线段的和.

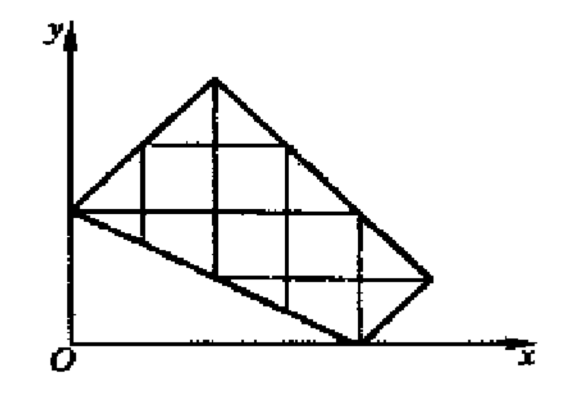


图 178

设这些水平线段的长为 a_1，a_2，…，a_k，它们将这个格点多边形分成（上、下）两个三角形与若干个梯形. 三角形与梯形的高都是 1，因此这个格点多边形的面积

$$S = \frac{1}{2}[a_1 + (a_1 + a_2) + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{k-1} + a_k) + a_k] \times 1$$

$$=a_1+a_2+\cdots+a_k,$$

即水平线段的和(在数值上)恰好等于 S.

同理铅直线段的和也等于 S.

因此结论成立.

98. 直线的条数

平面上有 n 条直线,每条直线恰好与其余 $n-1$ 条直线中的1 999条直线相交. 求 n 的所有可能值.

本题的第一步是将 n 条直线分类:平行的直线归于同一类. 设共分为 k 类.

由于每条直线恰与其余的 $n-1$ 条直线中的1 999条直线相交,所以任意去掉一个类后,其余的 $k-1$ 个类共有1 999条直线. 因此,每个类中含有的(互相平行的)直线的条数相等. 设这条数为 t,则

$$(k-1)t=1\,999.$$

因为1 999是质数,所以

$$k-1=1,\quad t=1\,999;$$

或

$$k-1=1\,999,\quad t=1.$$

于是直线的条数 $n=kt=3\,998$或2 000.

99. 两人博弈

下面是一个两人博弈的问题:

甲、乙两人轮流将平面上未染色的点染色. 甲每次将1个点染成红色,乙每次将10个点染成蓝色. 如果出现3个红点构成正三角形,甲就获胜. 甲先染,问乙能否阻挡甲取胜?

答案是乙不能阻挡甲取胜.

在甲染第 7 个点时，这个点 A_7 与前面的红点 $A_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 可作为正三角形的两个顶点，第 3 个顶点有两种选择（分别在 A_7A_i 的两侧）. 这样，可与前面的两个红点合在一起组成正三角形的红点就有

$$2\times 6=12>10$$

个. 而此乙无法阻挡甲在第 8 步获胜.

严格说来，上面的证明还有点毛病：

1. 甲染 A_7 后，所成 12 个正三角形 $A_7A_iB_i$，$A_7A_iC_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 的顶点 B_i，$C_i(1\leqslant i\leqslant 6)$，是否有重合的？

不难看出，只要甲在同一条直线上取 $A_1, A_2, \cdots, A_7$，所产生的 B_i，$C_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 就不会有重合的.

2. 上述 12 个点 B_i，$C_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 中，会不会已有乙染过的点（乙是“赛诸葛”，料事如神，已经先作了布置）？

只要 A_7 取得足够远，就可以避开乙的“埋伏”. 我们可以设第 7 轮以前染的点（有限多个）全在一个圆内，圆心为 O，半径为 R（图 179）. 取 A_7 距 O 为 $3R$，则对 $B_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 有

$$A_iB_i=A_iA_7\geqslant OA_7-OA_i\geqslant 3R-R=2R,$$

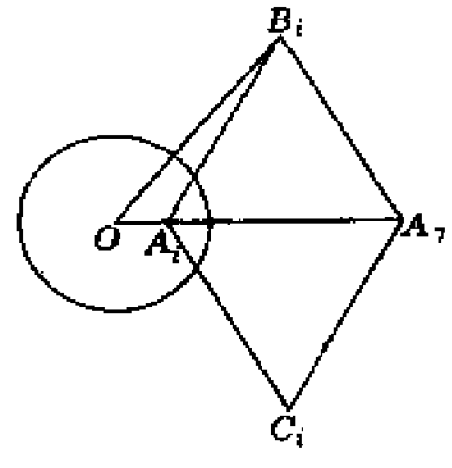


图　179

从而
$$OB_i\geqslant A_iB_i-OA_i>2R-R=R.$$

即 B_i 在 $\odot O$ 外，不会与乙已染的点重合. 同理 $C_i(1\leqslant i\leqslant 6)$ 也不会与乙已染的点重合.

这样，只要甲在一条直线上取点，第 7 个点取得足够远，则第 8 次染色时，便可取得胜利.

不难看出，甲只染7个或更少的点时，还不能获胜.

本题中，10即使换成更大的数，如10 000，乙仍不能阻挡甲获胜. 因为甲染第n个点时，可产生$2(n-1)$个“获胜点”. 当n很大时，$2(n-1)$大于10 000. 用句“行话”来说，获胜点的个数是“一阶无穷大”，而乙每次染的点数是一个“常数”.

有人从第一次、第二次、……说到第n次. 其实前若干次是不重要的，不是关键，应直接讨论第7次. 有人用$2C_n^2>10n$来解，不如上面用$2(n-1)>10$好.

100. 同色的等腰三角形

将平面上的点染上红、蓝、黄中任一种颜色. 不论怎样染，证明总有一个等腰三角形三个顶点同色.

先看一个较简单的问题：将平面上的点染上红、蓝两种颜色中的任一种. 不论怎样染，总有一个等腰三角形三个顶点同色.

这个问题不难. 先任取一点O，不妨设O为红点，以O为圆心任作一圆. 如果圆上有两个红点，结论已经成立. 如果圆上只有一个红点，那么其余的点都是蓝点. 设A，B是圆上的两个蓝点，那么A，B将圆分成两个弧，其中至少有一条弧的中点C不是红点，$\triangle ABC$即为所求.

另一种证法是考虑一个正五边形. 五个顶点中必有三个点同色（面为只有两种颜色），而这三点又构成等腰三角形.

现在回到染三种颜色的问题. 将上面的两种解法结合起来即可：

先任取一点O，不妨设O为红点，以O为圆心任作一圆. 圆上如有两个红点，结论已经成立. 设圆上至多有一个红点P.

考虑这圆的内接正五边形. 可以设五个顶点都不是红色(否则绕圆心 O 稍作旋转，使顶点都不是红色). 这五点中必有三点同色，而这三点又构成等腰三角形.

101. 折 纸 穿 针

在一张矩形纸片上有一些黑点：

(a) 所有黑点共线；

(b) 黑点共 3 个，不共线.

试将纸折几次，折痕不过任何黑点. 然后用一根针穿过所有黑点，但不穿过任何其他的点.

证明在(a)，(b)两种情况，上述折纸穿针的要求必能成功.

先考虑情况(a). 设黑点都在直线 a 上，从左到右依次为 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 又设 A_iA_{i+1}的垂直平分线为 $l_i(i=1,2,\cdots,n-1)$.

沿 l_1 将纸对折，使 A_2 落在 A_1 上面. 再将上面的纸沿 l_2 对折，使 A_3 落在 A_2 上面. 这样继续下去，直至将上面的纸沿 l_{n-1}对折，使 A_n 落在 A_{n-1}上面. 然后将针垂直纸面穿过 A_n, $A_{n-1}, \cdots, A_1$.

情况(b)较为复杂. 设三个黑点为$\triangle ABC$ 的三个顶点. 可以假定在$\triangle ABC$ 外的纸片部分非常狭窄，其宽度小于任一个指定的正数 ε. 否则可采取如下步骤：

先作一条与 BC 平行的直线 $B'C'$，与 BC 的距离为$\frac{\varepsilon}{2}$(如面 180). 然后将纸折叠，使纸的角 O 落到 $B'C'$上. 再折叠一次，使第一次的折痕落到$B'C'$上. 如此继续下去，每次使上

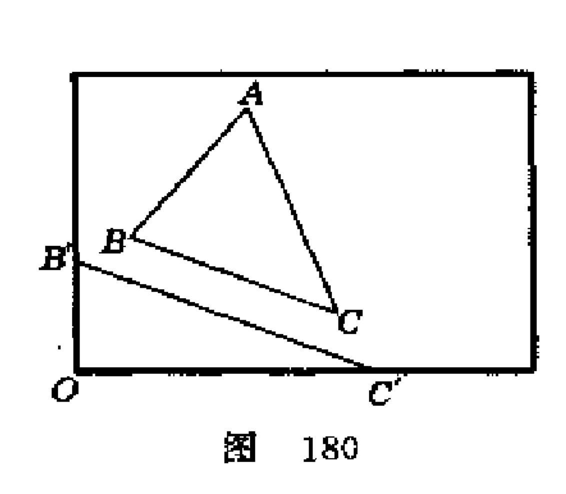


图 180

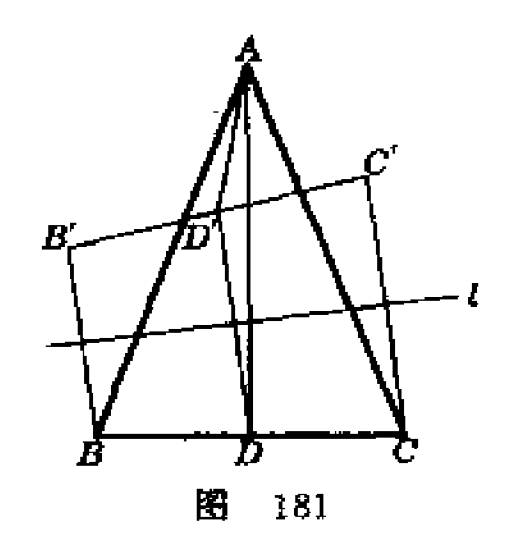


图 181

一次的折痕落到 $B'C'$ 上．这样折叠若干次后，纸片边缘到 BC 的距离小于 $\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$．对 AB，AC 也可作类似的处理．

如果有两条边相等，例如 $AB=AC$，我们先折叠一次(图181)．如果折痕 $l /\!/ BC$，那么 B，C 的对应点 B'，C' 仍满足 $AB'=AC'$．我们使 l 稍偏一点，不与 BC 平行，这时 $AB'\neq AC'$，其中 B'，C' 分别为 B，C 关于 l 的对称点(可以严格证明如下：设 BC 中点为 D，D 关于 l 的对称点为 D'．因为 l 不与 BC 平行，所以 DD' 不与 BC 垂直，不妨设 $\angle BDD'<90°$．这时 A 与 B 在直线 DD' 的两侧．$\angle B'D'D=\angle BDD'<90°$．所以 $\angle AD'B'>180°-\angle B'D'D>90°$．因此 $AB'\neq AC'$)．

由于纸在 $\triangle ABC$ 外的部分很窄，所以 B'，C' 都不在纸上．

此外，以 A 为圆心，BC 为半径作圆．只要 l 很接近 BC，就可以使 B'，C' 都不在圆上．这样 AB'，AC' 均不等于 $B'C'$．

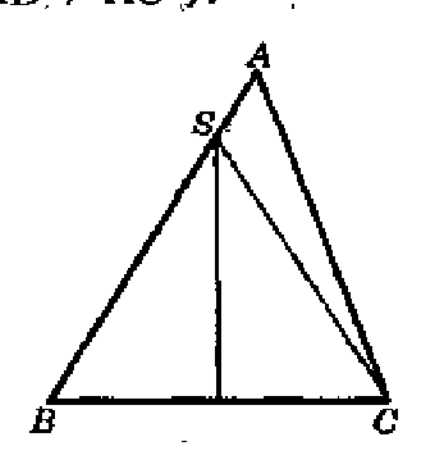


图 182

于是，总可以假定 $\triangle ABC$ 的边两两不等．设 $AB>AC>BC$．如图 182，

先沿 BC 的中垂线 l 折叠使 B 与 C 重合. 因为 $AB>AC$, l 与 AB 相交于 AB 内部一点 S. 由于纸在三角形外的部分很窄，所以 A 不与其他点重叠. 再沿 AC 的中垂线折叠，使 C 与 A 重合. 然后用针垂直于纸面，穿过 C, B, A 三点.

102. 先猜后证

确定平面上所有至少包含三个点的有限点集 S，它们满足下述条件：

对于 S 中任意两个互不相同的点 A, B，线段 AB 的垂直平分线是 S 的一个对称轴.

我们先猜一下 S 可以是什么样的点集.

显然正三角形的三个顶点组成的集符合要求. 正方形的顶点组成的集也符合要求. 更一般地，正 $n(n\geqslant 3)$ 边形的 n 个顶点组成的集符合要求.

反过来，我们希望符合要求的点集 S 只有上述几种情况，即设 S 有 n 个点 $(n\geqslant 3)$，我们设法证明这 n 个点是正 n 边形的顶点.

正 n 边形内接于圆. 我们先来证明 S 中的 n 个点共圆.

圆心在哪里呢？

圆心当然是与这 n 点有关的点. 与 n 点有关的点中，最简单最常见的一个就是这 n 个点的重心. 设 G 为这 n 个点的重心. 对 S 中任两点 A, B，要证明

$$GA=GB. \quad ①$$

关于线段 AB 的垂直平分线作对称. 由 S 满足的条件，经过这一对称，S 变为自身，因而重心 G 也变为自身，即 G 在 AB 的垂直平分线上. 所以①成立.

于是 S 中的所有点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都在一个以 G 为圆心的圆上，它们构成一个凸 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$.

关于 A_1A_3 的对称轴作对称，S 不变，所以 A_2 一定变为自身，即 A_1 是 $\overset{\frown}{A_1A_3}$ 的中点. 同理，A_i 是 $\overset{\frown}{A_{i-1}A_{i+1}}$ 的中点 ($i=1, 2, \cdots, n, A_{n+1}=A_1$). 因此 n 边形 $A_1A_2\cdots A_n$ 是正 n 边形.

解决本题的关键是"猜". 大胆地猜，先猜出 S 必由正 n 边形的顶点组成，再猜出这正 n 边形的内接圆圆心是它们的重心. 大胆假设，小心求证，是科学研究的重要方法.

103. 距离为有理数

平面上是否有无穷多个点，两两的距离都是有理数？

问题太容易了！一条数轴上的整点，两两的距离都是整数！

再加上一点限制就不容易了：

平面上是否有一个无穷点集，无三点共线，并且任两点之间的距离都是有理数？

如果只要求这些点不全共线，问题还比较容易. 现在要求每三点都不共线，这就困难多了.

仅仅要求每三点不共线，倒也不难做到：任取一条二次曲线，最简单当然是一个圆，任一条直线与圆（或二次曲线）至多有 2 个公共点，所以圆（二次曲线）上每三点不共线.

因此，我们可以先作一个半径为 1 的圆，然后设法在圆上找距离为有理数的点.

不妨设圆心为原点O. 单位圆上的点A，坐标都可以写成

$(\cos\alpha,\sin\alpha)$的形式，其中 α 是 OA 与 x 轴正方向所成的角(图 183).

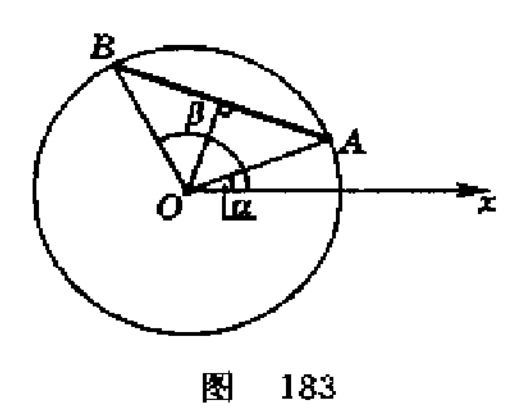


图 183

于是圆上任两点 $A(\cos\alpha,\sin\alpha)$，$B(\cos\beta,\sin\beta)$之间的距离是

$$AB=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}. \qquad ①$$

而

$$\cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}. \qquad ②$$

如果取 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1-s^2}{1+s^2}$，那么

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{1-\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{2s}{1+s^2}.$$

同样，取 $\cos\frac{\beta}{2}=\frac{1-t^2}{1+t^2}$，那么 $\sin\frac{\beta}{2}=\frac{2t}{1+t^2}$. 因此当 s，t 为有理数时，AB 是有理数.

于是，在单位圆上取无穷多个点$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，其中 $\cos\frac{\alpha}{2}=\frac{1-s^2}{1+s^2}$，$s$ 为有理数，那么这些点无三点共线，并且每两点之间的距离是有理数.

熟悉反演的人，不难看出，如果以⊙O 上一点(例如⊙O 与 y 轴的交点 P)为反演中心，2 为反演半径作反演，那么上面⊙O 上的点变成一条直线(过 y 轴与⊙O 的另一交点 Q，并且与⊙O 相切的直线)上的一些有理点.

104. 覆　　盖

平面上有一个半径为 1 的圆及一些带形. 带形即两条平

行直线所夹的图形，平行线称为带形的边，平行线的距离称为带形的宽.

如果这些带形的宽的和为 100，证明可将这些带形平移，使得圆被它们完全覆盖.

注意：这些带形不都是平行的，否则就太容易了(只要宽的和$\geqslant 2$，就可以覆盖了).

我们可以证明稍强一点的结论：一个边长为 2 的正方形(包括边界及内部)，可以被这些带形(经过平移)完全覆盖.

首先，带形的宽中如果有$\geqslant 2\sqrt{2}$的，结论显然成立. 因此，我们设带形的宽都$<2\sqrt{2}$.

不妨设正方形的一边与 x 轴平行，另一边与 y 轴平行. 将带形分为两类，一类边的斜率>0，另一类边的斜率<0. (斜率为 0 的可放在任一类). 不妨设第一类的宽的和$\geqslant \frac{100}{2}=50$.

将第一类的带形按斜率从大到小的次序排成L_1、L_2，…(斜率相同的可以合成一个).

如图 184，先用 L_1 去盖，盖住正方形 $ABCD$ 的右上角 A 及 AB 上的 AA_1. 再用 L_2 盖住 AB 上的 A_1A_2，……直至盖到右下角 B 及 BC 上的 BB_1. 再继续盖 BC 上的 B_1B_2，……带形依次去覆盖，正方形的边则依 $A\to B\to C\to D\to A$ 的顺序，一段接一段地被带形覆盖. 因为

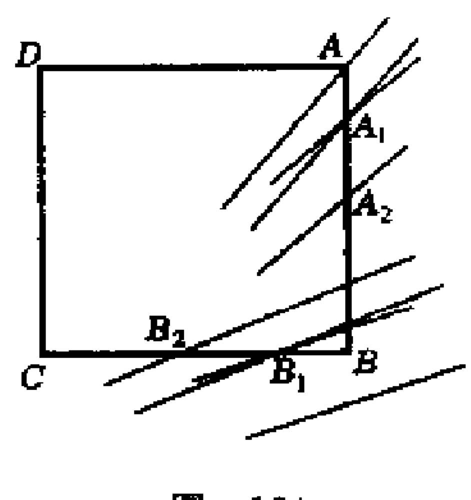


图　184

边上被带形盖住的线段不小于带形的宽，只有在顶点处可能"浪费"一个带形，所以覆盖正方形的整个周长最多需宽的和为

$$4\times(2+2\sqrt{2})<20.$$

远小于50，所以这些带形覆盖正方形$ABCD$的周长绰绰有余.

对于正方形$ABCD$内任一点E. 过E作AB的平行线交BC于E_1，交AD于F(图 185).

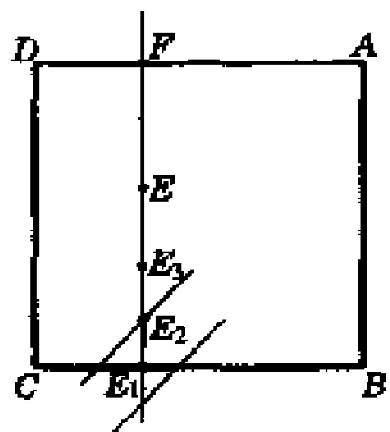


图 185

盖住E_1的带形，在E_1F上盖住一段E_1E_2，接下去的带形也在E_1F上盖住一段. 由于它的斜率比前一个小，所以E_2必在这个带形内部. 于是这两个带形盖住E_1F上的一段E_1E_3. 如此继续下去，这些带形盖住E_1F上的一段(没有空隙). 当带形盖住D时，这些带形(从盖住E_1的直到这个盖住D的)已经将整个E_1F完全盖住，当然也盖住了E点.

因此正方形$ABCD$被这些带形完全覆盖.

（十一）在 前 头

105. 问题征解（一）

一本书，应当留几个问题供人思考.

下面一道问题，征求读者的解答.

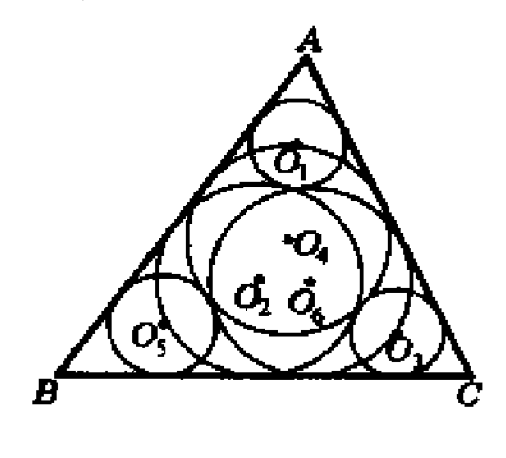


图 186

在$\triangle ABC$中，$\odot O_1$与CA，AB相切，$\odot O_2$与$\odot O_1$及AB，BC相切，$\odot O_3$与$\odot O_2$及BC，CA相切，$\odot O_4$与$\odot O_3$及CA，AB相切，$\odot O_5$与$\odot O_4$及AB，BC相切，$\odot O_6$与$\odot O_5$及BC，CA相切. 求证：$\odot O_6$与$\odot O_1$相切.

106. 问题征解（二）

对于一个图形F，如果能作一条与F无公共点的直线，使F分成两个部分，分别在这条直线的两侧，那么F就称为可分离的；否则就称为不可分离的.

例如F由两个外离的圆组成，那么F就是可以分离的. 而当F由两个相交的圆组成时，F是不可分离的.

注意在F由三个两两外离的圆组成时，F不一定是可以分离的. 图 187 中三个圆两两外离，但它们组成的图形却是不

可分离的.

已知 n 个半径分别为 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 的圆不可分离，证明这些圆可用一个半径为

$$r_1 + r_2 + \cdots + r_n$$

的圆覆盖.

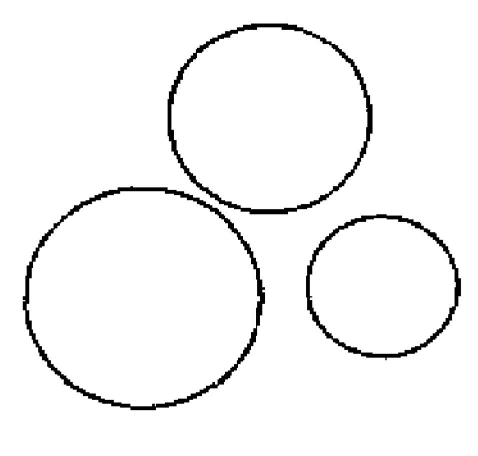


图 187

本题曾在《数学通讯》上征解多年，未得到正确的答案. 很多人认为 n 个圆不可分离，则去掉一个圆后仍不可分离. 这是不对的. 图 187 即表明去掉一个圆后，剩下的圆有可能是可以分离的.

在 L. Fejes Tóth 的名著《Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum》(Springer-Verlag, 1953)中就有这个问题，可惜国内很少有人见过这本书.